

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_188207

UNIVERSAL
LIBRARY

۱۶۳

سلسلہ شریعت اسلامیہ

صغاری احصاء

جلد دوم

تصنیف

ہورین المیمب ایم۔ اے ایل ایل ڈی، ایس۔ سی۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔ اے وکشن چندر ایم۔ اے

پروفیسر ان گلیہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۳۸ھ م ۱۳۳۸ھ ف م ۲۹

طبع خانہ عثمانیہ عکارتیہ لاہور

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کر کے
طبع و شائع کی گئی ہے

دیباچہ (از مصنف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصاء کے اُن حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اس وقت اس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ ہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔ اس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کی گئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے قوت کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{فرما}{فرلا} = ما$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جائیگا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جاسکتا لیکن

یہ کہنا بیجا نہ ہو گا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصاء کے تعلق کے مد نظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مکمل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لاستنباطی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور مکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پچھلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر کیا استدفاق کے نظریہ کی مدد سے عام طریقہ پر بحث کی گئی تھی، احصاء کی کتاب میں اس وقت اس نظریہ کا داخل کر لینا شاید عجیب نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اسکو ترک کر دیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف قونی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکوزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قبیل کے چیزوں کا اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط

جون ۱۹۱۹ء

ہورس لمیب

فہرست مضامین

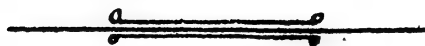
صفحہ	مَضْمُون	دفعہ
	چھٹا باب	
	تکمیل	
۲۲۱	سُئل کی نوعیت	۷۲
۲۲۳	معیاری شکلیں	۷۳
۲۲۶	ضابطوں کی سادہ توسیع	۷۴
۲۳۸	دو درجی نسب نموداری منطق کسری	۷۵
۲۳۲	شکل (۱) + (۲) + (۳)	۷۶
۲۳۵	متغیر کی تبدیلی	۷۷
۲۳۸	مشائی تفاظوں کا مکمل	۷۸
۲۴۰	مشائی ابدال	۷۹
۲۴۱	مکمل باحصص	۸۰

۲۴۴	متواتر تحویل سے تکمیل	۸۱
۲۴۶	تحویلی ضابطے (سلسل)	۸۲
۲۴۸	منطق کسوں کا تکمیل	۸۳
۲۵۱	سادہ اصلیں	۸۴
۲۵۳	دو درجہ اجزاء کے ضربی	۸۵
۲۵۷	غیر منطق تفاعلوں کا تکمیل	۸۶
۲۶۰	اشلہ نمبری ۲۳ تا ۳۰	
ساتواں باب		
محدود مکملے		
۲۷۴	تہید - رقبوں کا سوال	۸۷
۲۷۸	مقلوب تفرق کے ساتھ تعلق	۸۸
۲۸۰	مکملہ کی عام تعریف	۸۹
۲۸۳	استدقاق کا ثبوت	۹۰
۲۸۷	فہ (لا) فرلا کی خاصیتیں	۹۱
۲۸۹	محدود مکملہ کا تفرق اسکی کسی حد کے لحاظ سے	۹۲
۲۹۰	نامحدود مکملہ کا وجود	۹۳
۲۹۱	محدود مکملہ کے محسوب کرنیکا قاعدہ	۹۴
۲۹۳	وہ صورتیں جہاں تفاعل فہ (لا) یا تکمیل کے حدود	۹۵
۲۹۴	لا متناہی ہو جاتے ہیں۔	
۲۹۶	دفعہ ۹۴ کے قاعدہ کا استعمال	۹۶
۲۹۸	تحویلی ضابطے	۹۷
۳۰۲	مربوط مکملے	۹۸

۳۰۴	امثلہ نمبری ۳۱ تا ۳۵	
	ابھواں باب	
	ہندی استعمال	
۳۱۷	رقبہ کی تعریف	۹۹
۳۱۸	کارٹیزی محدودوں میں رقبہ کے لئے ضابطہ	۱۰۰
۳۲۱	رقبہ کو کیا علامت دی جاتی چاہئے	۱۰۱
۳۲۴	قطبی محدودوں کے لحاظ سے رقبہ	۱۰۲
۳۲۶	رقبہ جو ایک متحرک خط اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے	۱۰۳
۳۲۹	ایسٹر کے سطح پیمائش کا نظریہ	۱۰۴
۳۳۲	مجسوں کے حجم	۱۰۵
۳۳۴	کسی مجسم کے حجم کے لئے عام جملہ	۱۰۶
۳۳۶	گردشی مجسم	۱۰۷
۳۳۷	بعض متعلق صورتیں	۱۰۸
۳۳۸	سینس کا قاعدہ	۱۰۹
۳۴۱	شعنی خطوط کا طول معلوم کرنا	۱۱۰
۳۴۴	تقسیم شدہ ضابطے	۱۱۱
۳۴۷	قطبی محدودوں کے لحاظ سے قوسیں	۱۱۲
۳۴۹	گردشی سطحوں کے رقبہ	۱۱۳
۳۵۳	تقریبی محکم	۱۱۴
۳۵۷	اوسط قیمتیں	۱۱۵
۳۶۰	ہندی اشکال کے اوسط مرکز	۱۱۶
۳۶۴	پیس کے مسئلے	۱۱۷
۳۶۸	ضعفی کے مسئلے	۱۱۸

۳۷۴	امثلہ نمبر ۳۶ تا ۴۱	
	نواں باب	
	خاص منحنی	
۳۸۹	جبر منحنی جو ایک تشاکل کا محور کہتے ہیں	۱۱۹
۳۹۷	ماورائی منحنی	۱۲۰
۴۰۰	لیسا زو کے منحنی	۱۲۱
۴۰۳	خط تدویر	۱۲۲
۴۰۷	برتدویر اور درتدویر	۱۲۳
۴۱۱	خاص صورتیں	۱۲۴
۴۱۶	دائری حرکتوں کا ایک دوسرے پر انطباق۔ بردورے	۱۲۵
۴۲۱	قطبی محدودوں کے لحاظ سے منحنی۔ ٹولبی خطوط	۱۲۶
۴۲۳	گہونگا منحنی اور خط صنوبری	۱۲۷
۴۲۵	منحنی $R = r \cos \theta$	۱۲۸
۴۲۶	ماسی قطبی مساوات	۱۲۹
۴۲۹	مربوط منحنی۔ تغلیب	۱۳۰
۴۳۲	پائیں منحنی۔ متکافی قطبی	۱۳۱
۴۳۷	دو قطبی عدد	۱۳۲
۴۴۲	امثلہ نمبر ۴۲ تا ۴۵	
	دسواں باب	
	انحناء	

۴۵۴	انحناء کا ناپ	۱۳۳
۴۵۸	منحنی کی ذاتی مساوات	۱۳۴
۴۶۱	نیم قطر انحناء کے لئے ضابطے	۱۳۵
۴۶۴	نیوٹن کا طریقہ	۱۳۶
۴۶۸	لٹھی دائرہ	۱۳۷
۴۷۰	لفاف	۱۳۸
۴۷۱	لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ	۱۳۹
۴۷۳	جبریہ طریقہ	۱۴۰
۴۷۵	لفافوں کی تماسی خاصیت	۱۴۱
۴۷۸	برہمنیچہ قوس	۱۴۲
۴۸۳	برہمنیچہ قوس	۱۴۳
۴۸۶	درجہ اولیٰ اور متوازی منحنی	۱۴۴
۴۸۸	متحرک شکل کا فوری مرکز	۱۴۵
۴۹۳	لڑکنے والے منحنیات میں استعمال	۱۴۶
۴۹۵	نقطہ گردونیہ کا انحناء	۱۴۷
۴۹۹	خط گردونیہ کا انحناء	۱۴۸
۵۰۱	کسی شکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں	۱۴۹
۵۰۳	بر دو بیوں کی بطور گردونیوں کے دوسری تکوین	۱۵۰
۵۰۶	اشکالہ نمبر ۲۶ تا ۲۹	



حصہ دوم

پچھٹا باب

تکمل

۱۶۱

۲۷۰۔ مسئلہ کی نوعیت۔ ابواب گذشتہ میں ہم نے

تفاعلوں کے تغیر کی شرح پر غور کیا ہے۔ احصا اکملات جسکی طرف اب ہم رجوع ہوتے ہیں بالکل الگ مسئلہ سے تعلق رکھتا ہے۔ یعنی اگر تفاعل کے تغیر کی شرح دی ہوئی ہو اور متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت مقرر کر دی گئی ہو تو متبوع متغیر کی کسی اور قیمت کے لئے ہمیں تفاعل کی قیمت دریافت کرنا ہے۔ علامتوں میں مساوات

$$\frac{F}{P} = f(P) \quad (1)$$

کامل درکار ہے جبکہ $f(P)$ متغیر P کا دیا ہوا تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ P کی کسی مقررہ قیمت (فرض کرو P_0) کے لئے $f(P_0)$ خاص قیمت (ج) اختیار کرے۔ مثلاً متحرک نقطہ کی رفتار کا قانون اور وقت t پر نقطہ کا مقام دیا گیا ہو تو ان امور کی بنا پر کسی وقت t پر نقطہ کا مقام دریافت کرنا مقصود ہو سکتا ہے۔ یہی بات

$$\text{مساوات} \quad \frac{F}{P} = f(P) \quad (2)$$

کو حل کرنے کے معادل ہے جس میں $f(P)$ (ت) وقت t کا معلوم تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ $t = t_0$ کے لئے $f(P_0) = P_0$ ۔

اگر ہم ایک مسلسل تفاعل طما (لا) ایسا دریافت کر سکیں کہ

$$\text{طما} (لا) = \text{فما} (لا)$$

تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں تبدیل ہو جاتی ہے

$$\text{فرما} = \text{فرلا} \text{ طما} (لا) \dots\dots\dots (۳)$$

پس اگر ما پر مسلسل ہونے کی قید لگا دی جائے جو احصا کے اکثر عملی اطلاقات کی صورت میں پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۵۶ کے مطابق

$$\text{ما} = \text{طما} (لا) + \text{ما} \text{ جہاں مستقل ہے} \dots\dots\dots (۴)$$

مساوات (۱) کا چنانچہ تعلق ہے مستقل مر کی ٹھیک قیمت غیر معین ہے اور اس لئے 'ما' اختیار ہی مستقل کہلاتا ہے اس سے فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے سوال کی باقی ماندہ شرط جس کا ذکر اوپر ہو چکا ہے پوری ہو سکتی ہے۔

پس اگر لا = ل کے لئے ما = ب تو

$$\text{ب} = \text{طما} (ل) + \text{مر}$$

اور اس لئے ما - ب = طما (لا) - طما (ل) \dots\dots\dots (۵)

اگر دفعہ ۲۵ کے مطابق عامل فرما کے لئے علامت عفا کام میں

لائی جائے تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\text{عفا} = \text{فما} (لا) \dots\dots\dots (۶)$$

اور جبریہ تقیم کے اصولوں کے مطابق اس کا حل

$$\text{ما} = \text{عفا} (لا) \dots\dots\dots (۷)$$

کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جبکہ مطلوب عامل عفا کی تعریف یہ ہو کہ

$$\text{عفا} \{ \text{عفا} (لا) \} = \text{فما} (لا) \dots\dots\dots (۸)$$

تفاعل عفا (لا) \dots\dots\dots (۹) اگر اس کا وجود ہو تو فما (لا) کا لحاظ لا کے نامعلوم و مکمل کہلاتا ہے۔

عام طور پر امکوہم

۱) فم (لا) فرلا (۱۰) سے تعبیر کریں گے۔

اس ترتیب کی ابتداء کی وجہ اگلے باب میں سمجھائی جائے گی۔ فی الحال (۱۰) کو (۹) کے لکھنے کا ایک دوسرا طریقہ خیال کرنا چاہئے۔

ریاضی کی اکثر شاخوں میں مید سے اوپر غلوب اعمال کے درمیان امتیاز کرنا اکثر ضروری ہوتا ہے۔ مید حاصل وہ ہے جو منقرہ قاعدوں کے مطابق کسی دئے ہوئے تفاعل پر ہمیشہ جا بجا ہو سکے اور اس سے غیر مشتبہ نتیجہ حاصل ہو۔ غلوب عمل کی نوعیت ایک سوال کی سی ہے یہاں جس وہ تفاعل دریافت کرنا ہوتا ہے جس پر ایک خاص طریقہ سے عمل کرنے سے ایک منقرہ نتیجہ حاصل ہو۔ ممکن ہے کہ اس سوال کا جواب ہو یا اس کا جواب ہو یا ایک سے زیادہ جواب ہوں (۱۱) دفعہ (۱۶)۔

عالم عفا کی صورت میں ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر اس کا ایک جواب موجود ہو تو جمع کردہ مستقل ہر کے غیر معین ہونے کی وجہ سے جوابوں کی تعداد دلاؤں گے۔ لیکن ہر صورت میں جواب ملتا ہے یا نہیں ابھی تحقیق طلب ہے۔ تاہم ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مسلسل تفاعل کا نامحدود تکملہ وجود رکھتا ہے اگرچہ اس وسعت کے ساتھ اس مسئلہ کو ثابت کرنے کی ضرورت نہیں رہے گی۔

اس باب کے باقی ماندہ حصے میں ہم مختلف اقسام کے ریاضی تفاعلوں کے نامحدود تکملے عملی طور پر دریافت کرنے کے سوال پر غور کریں گے۔

مثال۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ۶ + ج ت دی ہوئی ہے تو

$$\text{فرس} = ۶ + ج ت = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} (۶ ت + \frac{۱}{۴} ج ت) \dots (۱۱)$$

پس $س = ۶ ت + \frac{۱}{۴} ج ت + م$ (۱۲)
شرط $س = س$ بوقت $ت = ت$ سے $م$ کو دریافت کر کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$س - س = ۶ (ت - ت) + \frac{۱}{۴} ج (ت - ت) \dots (۱۳)$$

۳۔ معیاری شکلیں :- کوئی ایسے ال قوانین موجود نہیں ہیں جنکی

مد سے کسی دے ہوئے مسلسل تفاعل فہ (لا) کا 'نامحدود تکملہ'
 ل فہ (لا) فرلا یا عفا فہ (لا) دریافت ہو سکے۔ جیسا کہ اوپر بتایا
 جا چکا ہے مکمل متغلب عمل ہے جس میں تفرق کے سیدھے عمل کے پہلے نتیجوں
 کی یادداشت ہی رہنا بنائی جاسکتی ہے۔

نیز اگرچہ تکملہ ایک خاص معنی میں ہمیشہ وجود رکھتا ہے لیکن ممکن ہے کہ یہ ریاضی میں
 عام طور پر استعمال ہونے والے جبریہ یا ماورائی تفاعلوں کے رقوم میں (محدود شکل میں)
 بیان نہ ہو سکے۔ انکی مثالیں ہیں

$$ل \text{ ہو } لا \text{ فرلا} ، ل \text{ جب } لا \text{ فرلا} ، ل \text{ لہا } لا \text{ فرلا} ،$$

اور انکی فہرست آسانی سے بے حد بڑھائی جاسکتی ہے۔
 محکمات کی کم و بیش باقاعدہ فہرست بنانے کے لئے سب سے پہلے ہمیں یہ کرنا چاہئے
 کہ مختلف سادہ تفاعلوں کے تفرقات کی ایک فہرست بنالیں۔ ان میں سے ہر ایک
 عمل کی تعلیم سے نامحدود مکمل کا ایک ضابطہ حاکم ہو جائیگا۔ اختیاری مستقل کو
 جو ہر نامحدود مکملہ میں جمع کیا جاتا ہے صریحی طور پر درج کرنے کی چند ان ضرورت
 نہیں ہے لیکن بعض اوقات ایک ہی جملہ کے دو مختلف طریقوں سے حاصل کئے
 ہوئے محکمات میں صرف مستقل کا فرق ہوتا ہے ایسے موقعوں پر اختیاری مستقل کی
 غیر موجودگی طالب علم پر شدت سے محسوس ہوگی۔

طالب علم کو ذیل کے اساسی نتیجوں سے پوری واقفیت حاصل کر لینی چاہئے۔

$$\text{فرلا} \text{ لا} = (ن) \text{ لا} = 1 \quad ل \text{ لا} \text{ فرلا} = \frac{1}{ن+1} \text{ لا} \quad [سوا جیکن = -] \quad (د)$$

$$\text{فرلا} \text{ لوک لا} = \frac{1}{لا} \quad ل \text{ لا} \text{ لوک لا} = \frac{1}{لا} \text{ لوک لا} \dots \dots (ج)$$

$$\text{فرلا} \text{ ہو} = ل \text{ ہو} \text{ لا} = \frac{1}{ل} \text{ ہو} \text{ لا} \dots \dots (ج)$$

$$\text{فرلا} \text{ جب لا} = ل \text{ جب لا} \text{ فرلا} = ل \text{ جب لا} \text{ فرلا} \dots \dots (د)$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{من لا}} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1} \text{ اگر لا} > 1, \int \frac{\text{فر لا}}{\text{من لا}} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1} \text{ من لا} < 1 = \frac{1}{1} \text{ لوک } \frac{1}{1-1}$$

..... (ج)

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{من لا}} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1} \text{ اگر لا} < 1, \int \frac{\text{فر لا}}{\text{من لا}} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1} \text{ من لا} > 1 = \frac{1}{1} \text{ لوک } \frac{1}{1-1}$$

..... (ق)

ان میں سے چند ضابطوں کے استعمال میں ذرا احتیاط کی ضرورت ہے۔ اول تو (ح) (آ) (ن) (ط) (پ) (ق) میں لا کی علامت سہولت کے لئے مثبت لے لی گئی ہے۔ یہ ہمیشہ جائز ہے کیونکہ شکل میں صرف لا کا مربع واقع ہوتا، نیز جب لا منفی ہو تو ضابطہ (ج) میں ترمیم کرنی پڑے گی کیونکہ منفی مقدار کا لوکارتم نہیں ہوتا۔ اس صورت میں لا = - لا اور

$$\text{ما} = \text{لوک لا رکھنے سے}$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\int \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \text{لوک لا}$$

لا کے مثبت یا منفی ہونے کی دونوں صورتیں ذیل کے ضابطے میں شریک ہیں

$$\int \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \text{لوک لا} \dots\dots\dots (ب)$$

نیز (ط) میں لا کو مثبت مان لیا گیا ہے۔ اور (پ) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ
 $1 > 1$ اور (ق) میں کہ $1 < 1$ ۔

۴۔ ضابطوں کی مادہ توسیع ۱۔ اوپر کے نتائج کی توسیع کرنیکے لئے

اول ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا میں مستقل جمع کر دینے سے ضابطوں کی شکل میں کوئی بنیادی فرق نہیں پڑتا۔ [دفعہ ۳۲ (آ) دیکھو]

پس ظاہر ہے کہ $\frac{1}{(1+1)^1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \dots (1)$

$\frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \dots (2)$

$\frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \dots (3)$

اور اسی طرح - چند دیگر مثالیں دفعہ ۵ اور ۶ میں دی گئی ہیں -
نیز اگر $\frac{1}{(1+1)^n}$ کو مستقل n سے ضرب دے دیا جائے تو شکل کی پہلے جیسی ہی رہتی
ہے سو ان کے اسکالہ n پر تقسیم ہو جاتا ہے - [دفعہ ۳۲ (۲) دیکھو]

مثلاً $\frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \dots (4)$

$\frac{1}{(1+1)^4} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \dots (5)$

۱۶۶

اور علیٰ بنالقیاس -
نیز $\frac{1}{(1+1)^5} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} \dots (6)$ جہاں مستطیل ہے

اور $\frac{1}{(1+1)^6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} \dots (7)$

کیونکہ اگر دونوں طرف $\frac{1}{2^n}$ سے عمل کریں تو ہر ایک صورت میں دفعہ ۲۹ اور ۳۰
کی رو سے ایک مساوات کے متبادلہ حاصل ہوتی ہے - (۷) میں یہ فرض کر لیا گیا
ہے کہ ارقام کی تعداد خود ہے -

پس منطق صحیح تغافل $\frac{1}{(1+1)^1} + \frac{1}{(1+1)^2} + \dots + \frac{1}{(1+1)^n} \dots (8)$

کا نام محدود تکملہ $\frac{1}{(1+1)^1} + \frac{1}{(1+1)^2} + \dots + \frac{1}{(1+1)^n} \dots (9)$

اب فرض کرو کہ منطق کسی شکل $\frac{1}{(1+1)^n}$ (۱۰)

عمل تقسیم سے یہ ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر $\frac{1}{(1+1)}$ (۱۱)
 کے حاصل جمع میں تحویل ہو سکتی ہے، پہلے حصے کا کھل اوپر کے قاعدہ سے عمل میں لاسکتے
 ہیں اور (۱۱) کا کھل ہے ۱ لوگ (۱+۱) (۱۲)

$$\text{مثال (۱)} \quad 1 \text{ (۱-۱) فرلا} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \text{ (۱-۱) فرلا}$$

$$\text{مثال (۲)} \quad 1 \text{ فرلا} = \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2} = 2 \text{ لوگ (۱-۱/۲)}$$

$$\text{مثال (۳)} \quad 1 \text{ حب لا فرلا} = \frac{1}{4} \text{ (۱-۱) جم ۲ (۱-۱) فرلا} = \frac{1}{4} \text{ لا} - \frac{1}{4} \text{ حب ۲ لا}$$

$$\text{مثال (۴)} \quad 1 \text{ س لا فرلا} = 1 \text{ (قط لا-۱) فرلا} = \text{مس لا- لا}$$

$$\text{مثال (۵)} \quad 1 \text{ لا فرلا} = 1 \text{ (۱-۱) فرلا} = \left\{ \frac{1}{(1-1/2)^2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right\} \text{ فرلا}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ لا} + \frac{1}{8} \text{ لا} + \frac{1}{8} \text{ لا} + \frac{1}{4} \text{ لا} + \frac{1}{8} \text{ لوگ (۱-۱/۲)}$$

۵۔ دو درجی نسب نما والی منطق کسیر :- اب ہم بتائینگے کہ

$$\text{فا (۱)} \quad \frac{1 \text{ لا} + 1 \text{ پ لا} + 1 \text{ ق}}{1 \text{ لا} + 1 \text{ پ لا} + 1 \text{ ق}} \text{ (۱)}$$

کی شکل کے کسی جملہ کو کس طرح کھل کر لے سکتے ہیں جہاں فا (۱) متغیر لا کا منطق صحیح
 تفاعل ہے۔ اگر ضرورت ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرو تاکہ باقی
 لا + ب کی شکل کا رہ جائے۔ پس تفاعل (۱) ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر

$$\text{لا + ب} \quad \frac{1 \text{ لا} + 1 \text{ پ لا} + 1 \text{ ق}}{1 \text{ لا} + 1 \text{ پ لا} + 1 \text{ ق}} \text{ (۲)}$$

کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر ہو سکتا ہے۔ پہلا حصہ دفعہ ۷ کے طریقہ سے کھلایا جاتا
 ہے۔ اب صرف حصہ (۲) پر غور کرنا باقی ہے۔

پہلے ہم $\frac{1}{(لا + پ + لا + ق)}$ (۳) پر غور کریں گے۔

نتیجہ شکل اس بات پر منحصر ہے کہ آیا پ کے $ق$ - اگر پ $ق$ سے
تو دو درجی جملہ حقیقی اور جدا گانہ اجزاء ضربی میں تحویل ہو سکتا ہے پس

$\frac{1}{(لا + پ + لا + ق)} = \frac{1}{(لا - عا)} \frac{1}{(لا - عا)}$ (۴)
اور مستقلات $لا$ اور $ب$ کو مناسب قیمت دے کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$\frac{1}{(لا - عا)} \frac{1}{(لا - عا)} = \frac{1}{(لا - عا)} + \frac{1}{(لا - عا)}$ (۵)
یہ مساوات تمام اہل بشر طے

$1 = \frac{1}{(لا - عا)} + \frac{1}{(لا - عا)}$ (۶)
یعنی $1 = ب + 0$ اور $1 = ب + عا - عا = 1$ (۷)

یعنی $1 = \frac{1}{عا - ب}$ اور $ب = \frac{1}{عا - ب}$ (۸)

پس $ک = \frac{فرلا}{(لا - عا)(عا - ب)}$ (۹)
 $\frac{1}{عا - ب} = \left\{ \frac{1}{(لا - عا)} - \frac{فرلا}{(لا - عا) ک} \right\}$
 $\frac{1}{عا - ب} = \left\{ \frac{1}{(لا - عا)} - \frac{1}{(لا - عا) ک} \right\}$

$\frac{1}{عا - ب} = \frac{1}{(لا - عا) ک}$ (۹)

جب ہم نے ایک مرتبہ اس بات کو معلوم کر لیا کہ (۵) کے دونوں طرف میں متانما مساوی
کئے جاسکتے ہیں تو 1 اور $ب$ کی قیمت ذیل کے طریقہ سے زیادہ آسانی سے دریافت
ہو سکتی ہے۔ اول ہم دونوں طرف $(لا - عا)$ سے ضرب دیتے ہیں اور پھر انہیں
 $لا = عا$ رکھنے سے 1 کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے۔ اسی طرح دونوں طرف
 $(لا - عا)$ سے ضرب دیکر $لا = ب$ رکھنے سے $ب$ کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔
پس ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔ 1 دریافت کرنے کے لئے جملہ کے

نسب نما میں اس کے متناظر خصوصی ضربی کو نکال دو اور باقی ماندہ جملہ میں لا = عہا
بج کر دو۔ اسی طرح دب کے لئے۔

اگر پ' = ۴ ق تو

$$لا + پ' لا + ق = (لا + پ' پ')$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرلا}}{لا + پ' پ'} = \frac{۱}{لا + پ' پ'} \dots \dots \dots (۱۰)$$

اگر پ' > ۴ ق تو

لا + پ' لا + ق = (لا + پ' پ') + (ق - پ' پ') = (لا - عہا) + پ' عہا
جس میں عہا اور پ' عہا حقیقی ہیں اور پ' کو مثبت لے لیا جاسکتا ہے۔
اب دفعہ ۳ (آ) کی سادہ توسیع سے

$$\text{فرلا} = \frac{۱}{پ' عہا} - \frac{۱}{لا - عہا} \dots \dots \dots (۱۱)$$

پ' < ۴ ق والا نتیجہ (۱۱) کے مشابہ شکل میں لکھا جاسکتا ہے کیونکہ ہم لکھ سکتے ہیں

لا + پ' لا + ق = (لا + پ' پ') - (پ' پ' - ق) = (لا - عہا) + پ' عہا... (۱۲)
جس میں عہا اور پ' عہا حقیقی ہیں اور پ' کو مثبت فرض کر لیا جاسکتا ہے۔ اب اگر
لا - عہا > پ' عہا سے تو دفعہ ۴ (پ) سے

$$\text{فرلا} = \frac{۱}{پ' عہا} - \frac{۱}{لا - عہا} \dots \dots \dots (۱۳)$$

اس میں اگر عہا + پ' عہا = عہا اور عہا - پ' عہا = پ' عہا رکھیں تو دفعہ ۴ سے باسانی
ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ (۹) کے معادل ہے۔

اگر لا - عہا < پ' عہا تو

$$\text{فرلا} = \frac{۱}{پ' عہا} - \frac{۱}{لا - عہا} \dots \dots \dots (۱۴)$$

اب زیادہ عام شکل (۱۲) پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا اور عہا کے مناسب
انتخاب سے ہم یہ کر سکتے ہیں کہ

$$(۱۵) \dots\dots\dots \frac{ا}{ب} = \frac{ا(۲+ا)}{ب(۲+ا)} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۱۵)$$

$$(۱۶) \dots\dots\dots \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۱۶)$$

$$\text{پس } \frac{ا(۲+ا)}{ب(۲+ا)} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۱۷)$$

$$(۱۸) \dots\dots\dots$$

ظاہر ہے کہ بائیں طرف کے دو ٹکڑات میں پہلا

$$(۱۸) \dots\dots\dots \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۱۸)$$

کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

اگر نسب نامہ واقعی جداگانہ اجزاء میں تحلیل ہو سکتا ہے تو (۱۷) کے دائیں جانب کے ٹکڑہ کو "جزوی کسروں" کے طریقے سے زیادہ آسانی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$(۱۹) \dots\dots\dots \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۱۹)$$

۱۶۹

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۲۰)$$

$$(۲۰) \dots\dots\dots \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۲۰)$$

$$(۲۱) \dots\dots\dots \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۲۱)$$

ہر صورت میں اس طول عمل کی ضرورت نہیں کیونکہ $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ا}{ب}$ کی قیمتیں صفحہ (۲۲۹) پر کے طریقے سے آسانی دریافت ہو سکتی ہیں۔

$$\text{پس (۱۷) کے مکمل سے } \frac{ا(۲+ا)}{ب(۲+ا)} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۲۲)$$

$$\text{مثال (۱) } \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۲۲)$$

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۲۲)$$

تو مذکورہ بالا طریقہ سے $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

پس $\int \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log(1-2) + \frac{1}{3} \log(2+1) = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2}$
بطریقہ دیگر

$\int \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2}$

مثال (۲) - $\int \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2}$

مثال (۳) - $\int \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2}$

مثال (۴) - $\int \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2}$

$\int \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2} = \frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2}$

مثال (۵) - $\frac{3-2}{(1+2)(2-2)}$ کو مکمل کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{3-2}{(1+2)(2-2)} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2-2}$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
اس لئے زیر بحث مکملہ $\frac{1}{3} \log(2-1) + \frac{1}{3} \log(1+2) = \frac{1}{3} \log(1+2)$

شکل ۷ - $\frac{1}{3} \log \frac{1+2}{1-2}$

اس قسم کے تقاعلوں کے لئے بھی اوپر سے ملتا جلتا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

(آ) اگر $\frac{1}{3}$ مثبت ہے تو یہ ذیل کی شکل کے معادل ہے

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا + ب}{لا + پ + لا + ق}$$

سب سے پہلے مکمل (۲) پر غور کرو۔

مربع کو کامل بنانے سے جذری علامت کے اندر کا جملہ (لا - ع) \pm بھا کی ایک یا دوسری شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ اب دفعہ ۴ (ص ۷) اور (ط ۷) سے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{فر لا}{لا + ع + ع + ب} = \frac{جبر ۱ - لا - ع}{ب}$$

اور (۴) $\frac{فر لا}{لا + ع + ع + ب} = \frac{جبر ۱ - لا - ع}{ب}$
ان تقاطعوں کو ذیل کی شکلوں میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{لا - ع + لا + پ + لا + ق}{ب} \text{ یا } \frac{لا - ع + ع + ب \pm ع + ب}{ب} \text{ لوگ}$$

(۵) :-

[دفعہ ۴۶ ویکھو]

عام صورت (۱) میں ہم فرض کرتے ہیں

$$(۶) \dots\dots\dots لا + ب = لا + ع + ع + ب$$

جو پوری ہوتی ہے اگر (۷) :-

$$\text{اسلئے } \frac{لا + ب}{لا + پ + لا + ق} = \frac{فر لا}{لا + ع + ع + ب} \text{ یا } \frac{لا + ب}{لا + پ + لا + ق} = \frac{فر لا}{لا + ع + ع + ب}$$

(۸) :-

پہلا نکتہ کے مساوی ہے اور دوسرے پاد بیجٹ ہو چکی ہے۔
(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ اس دفعہ کی ابتدائی شکل میں سب ہے۔
عمومیت میں فرق آنے کے بغیر اس کے مساوی لیا جاسکتا ہے۔
پہلے تقاطع

$$(۹) \dots\dots\dots \frac{۱}{۱اق + پ - لا - لا}$$

پر غور کرو۔

اب سوائے اس صورت کے جبکہ دو درجی جگہ حقیقتاً منفی ہو (جس صورت میں لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے یہ خیالی ہو گا) جگہ کو بیا۔ (لا۔ عا) کی شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{۱ - لا - عا}{ب} = \frac{فر لا}{۱ا - ب - لا - عا}$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{۱ا + ب}{۱اق + پ - لا - لا}$$

$$(۱۲) \dots\dots\dots ۱ا + ب = لا (۱ا + پ - لا) + عا$$

$$(۱۳) \dots\dots\dots ۱ا - عا = لا اور عا = ب + ۱ا + پ$$

$$اس لئے ۱ا + ب = فر لا = لا (۱اق + پ - لا - لا) فر لا$$

$$(۱۴) \dots\dots\dots \frac{فر لا}{۱اق + پ - لا - لا} + عا$$

ان دو میں سے پہلا کلمہ ۱اق + پ - لا - لا کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

$$مثال ۱۔ ۱ا + ب = فر لا = لا (۱ا + پ - لا) + عا = فر لا = لا (۱ا + پ - لا) + عا$$

$$۱ا + ب = فر لا = لا (۱ا + پ - لا) + عا = فر لا = لا (۱ا + پ - لا) + عا$$

$$= - لا (۱ا + پ - لا) + عا = لا (۱ا + پ - لا) + عا$$

مثال ۲- $\int \frac{1+2x}{1+x^2+4x^4} dx = \int \frac{1+(1/2+2x)}{1+x^2+4x^4} dx = \int \frac{1/2+2x}{1+x^2+4x^4} dx$

$$\int \frac{1/2+2x}{1+x^2+4x^4} dx = \int \frac{1/2}{1+x^2+4x^4} dx + \int \frac{2x}{1+x^2+4x^4} dx$$

$$= \int \frac{1/2}{1+x^2+4x^4} dx + \int \frac{2x}{1+x^2+4x^4} dx$$

مثال ۱۳- $\int \frac{1-x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$$= \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

۷۷- متغیر کی تبدیلی: مکمل کے دریافت کرنے میں دو ترکیبیں خاص طور پر مفید ثابت ہوئی ہیں ایک تو نئے متبوع متغیر کا انتخاب اور دوسرے مکمل بالخصوص

فرض کرو کہ مکمل $\int f(x) dx = \int f(u) du$ (۱)
میں متغیر کو u سے t میں بدلا ہے جہاں u نئے متغیر کا دیا ہوا افعال ہے
تو دوسرے ۳۲ سے

$$\int f(x) dx = \int f(u) du = \int f(u) \frac{du}{dt} dt \quad \text{..... (۲)}$$

اور اس لئے مطلوب علامت \int کی تعریف سے

$$\int f(x) dx = \int f(u) \frac{du}{dt} dt$$

پس $\int f(x) dx = \int f(u) du$ (۳) *

[اس سے قاعدہ نکلتا ہے کہ علامت \int کے بعد dx کی بجائے $\frac{du}{dt} dt$ درج کر دو]

اور برعکس اس کے جب کبھی دیا ہوا شکل

$$J \text{ فہ} (ع) \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \text{ فرلا} \dots \dots \dots (۴)$$

کا ہو تو اسکی بجائے $J \text{ فہ} (ع) \text{ فرع}$ (۵)
 رکھ سکتے ہیں اور اکثر اسے دریافت کرنا آسان ہوتا ہے۔
 ذیل کی صورتیں ضروری ہیں۔

$$(آ) \quad J \text{ فہ} (لا + لا) \text{ فرلا} = J \text{ فہ} (ع) \text{ فرع} \dots \dots \dots (۶)$$

جہاں $ع = لا + لا$

$$(۲) \quad J \text{ فہ} (گ لا) \text{ فرلا} = \frac{1}{2} J \text{ فہ} (ع) \text{ فرع} \dots \dots \dots (۷)$$

جہاں $ع = گ لا$ ۔ یہ دونوں نتیجے دفعہ ۲ میں استعمال میں آچکے ہیں۔

$$(۳) \quad J \text{ فہ} (لا^۲) \text{ لا فرلا} = \frac{1}{4} J \text{ فہ} (ع) \text{ فرع} \dots \dots \dots (۸)$$

جہاں $ع = لا^۲$
 ذیل کے شکلوں (۸) کی مثالیں ہیں۔

$$\text{مثال (۱)} - J \text{ فرلا} = \frac{J \text{ لا فرلا}}{(لا^۲ + لا + ۱)} = J \text{ فرع} = \frac{J \text{ فرع}}{ع (ع + ۱)}$$

$$= \frac{1}{2} J \left(\frac{1}{ع} - \frac{1}{ع+۱} \right) \text{ فرع} = \frac{1}{2} \text{ لوگ} \frac{ع}{ع+۱}$$

$$= \text{لوگ} \frac{ع}{ع+۱}$$

$$\text{مثال (۲)} - J \text{ لا فرلا} = \frac{1}{2} J \text{ فرع} = \frac{1}{2} J \left(\frac{1}{ع} - \frac{1}{ع+۱} \right) \text{ فرع}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ لوگ} \frac{ع-۱}{ع+۱}$$

$$(۵) \dots\dots\dots = \frac{\text{فرس لا}}{\text{س لا}} = \text{لوگ س لا}$$

اس سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$(۶) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

ضوابط (۱) تا (۶) معیاری نتیجے شمار ہوتے ہیں اور انہیں غلط کر لینا چاہئے

$$(۳) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

$$(۷) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

اب آئیں اگر مس لا = ع رکھیں تو

$$(۸) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

اور یہ دفعہ ۳ کی معیاری شکلوں (آ)، (پ)، (ق) میں سے کسی ایک کے تحت آتا ہے۔

$$(۹) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

$$(۱۰) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

اور ہمیں مس لا = ع رکھتے سے

$$\dots\dots\dots = \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} = \text{لوگ س لا} + \frac{\text{فر ع}}{\text{جم لا}} + \dots\dots\dots$$

زائدی تفاعلوں والے مشابہتیجے یہاں درج کئے جاتے ہیں۔

$$۱ \text{ مسر } \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} = \text{لوک جنرلا} = \text{لوک جنرلا} \dots\dots (۱۲)$$

$$۱ \text{ جنرلا} \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} = \text{قطرلا} \frac{۱}{۱} \text{ جنرلا} \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} = \text{قمرلا} \dots\dots (۱۳)$$

$$۱ \text{ جنرلا} \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} = \text{لوک مسر } \frac{۱}{۲} \dots\dots (۱۴)$$

$$۱ \text{ جنرلا} \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} = ۲ \text{ فرلا} \frac{۱}{۱} \text{ مسر } \frac{۱}{۱} \dots\dots (۱۵)$$

اسی طرح شکلوں کی ۱ + ۱ ب جنرلا اور ۱ + ۱ ب جنرلا کا مکمل ابدال

مسر $\frac{۱}{۲}$ = ۲ سے عمل میں آسکتا ہے۔

۷۹۔ مشتی ابدال۔ جبر یہ تفاعلوں کا مکمل جنس دو درمی جملوں کا جذر شامل ہوتا ہے اکثر اوقات متبوع متغیر کی بجائے مشتی یا زائدی تفاعل درج کرنے سے بآسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

مثلاً ۱ - ۱ - ۱ کی موجودگی سے ابدال لا = ۱ جب ط یا لا = ۱ مسر ۱

فہم میں آتا ہے

نیز ۱ - ۱ - ۱ کی موجودگی سے ابدال لا = ۱ قط ط یا لا = ۱ جنر ۱

اور ۱ - ۱ - ۱ کی موجودگی سے ابدال لا = ۱ مس ط یا لا = ۱ جنر ۱ کی طرف توجہ جاتی ہے۔

مثال (۱)۔ مکملہ ۱ - ۱ - ۱ فرلا (۱) کو دریافت کرو۔

لا = ا جب طہ اور فرلا = ا جم طہ فرطہ رکھتے

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{فرلا} = \arcsin x \quad \text{ا} = \arcsin x \quad \text{جم طہ فرطہ} = \arcsin x + \arcsin x = 2 \arcsin x$$

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} \quad \text{ا} = \arcsin \frac{x}{2} \quad \text{جم طہ} = \arcsin \frac{x}{2} + \arcsin \frac{x}{2} = 2 \arcsin \frac{x}{2}$$

(۲).....

مثال (۲) تکمیل فرلا = $\frac{\arcsin x + \arcsin x}{2}$ فرلا (۳) دریافت کرو۔

لا = ا جب طہ اور فرلا = ا جم طہ فرطہ رکھتے

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{فرلا} = \arcsin x \quad \text{ا} = \arcsin x \quad \text{جم طہ فرطہ} = \arcsin x + \arcsin x = 2 \arcsin x$$

$$= \arcsin x - \arcsin x = 0 \quad \text{جم طہ} = \arcsin x + \arcsin x = 2 \arcsin x$$

مثال (۳) - $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ کو دریافت کرو۔

اگر لا = ا جم طہ اور فرلا = ا جب طہ فرطہ اس میں درج کریں تو

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} \quad \text{ا} = \arcsin \frac{x}{2} \quad \text{جم طہ} = \arcsin \frac{x}{2} + \arcsin \frac{x}{2} = 2 \arcsin \frac{x}{2}$$

۸۰۔ تکمیل بالخصص - دفعہ ۱ میں جس طریقہ کا ذکر کیا گیا ہے

یعنی ”تکمیل بالخصص“ وہ دفعہ ۳ کے مضامین

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \arcsin \frac{x}{2} \quad \text{ا} = \arcsin \frac{x}{2} \quad \text{جم طہ} = \arcsin \frac{x}{2} + \arcsin \frac{x}{2} = 2 \arcsin \frac{x}{2}$$

کو الٹنے سے حاصل ہوتا ہے۔ طرہین کو تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$= \arcsin x - \arcsin x = 0 \quad \text{جم طہ} = \arcsin x + \arcsin x = 2 \arcsin x$$

جس سے $\text{ع} \frac{\text{ف} \text{و}}{\text{ز} \text{لا}} \text{ف} \text{ز} \text{لا} = \text{ع} \text{و} - \text{و} \frac{\text{ف} \text{ع}}{\text{ز} \text{لا}} \text{ف} \text{ز} \text{لا} \dots \dots \dots (۲)$
اس سے ذیل کا قاعدہ معلوم ہوتا ہے۔

اگر تکمیل شدنی جملہ دو اجزاء کا حاصل ضرب ہو جس میں سے ایک $(\frac{\text{ف} \text{و}}{\text{ز} \text{لا}})$ فوراً تکمیل ہو سکے تو اسے یہ فرض کر کے تکمیل کیا جاسکتا ہے کہ دوسرا جزو (ع) مستقل ہے بشرطیکہ تکمیل شدہ جزو (و) اور دوسرے جزو کے مشتق $(\frac{\text{ف} \text{ع}}{\text{ز} \text{لا}})$ کے حاصل ضرب کے تکمیل کو اس میں سے گھٹا دیا جائے۔

(۲) میں $\text{و} = \text{لا}$ رکھنے سے ایک بہت مفید خاص شکل حاصل ہوتی ہے یعنی

$\text{ع} \frac{\text{ف} \text{و}}{\text{ز} \text{لا}} \text{ف} \text{ز} \text{لا} = \text{ع} \text{و} - \text{و} \frac{\text{ف} \text{ع}}{\text{ز} \text{لا}} \text{ف} \text{ز} \text{لا} \dots \dots \dots (۳)$

اس قاعدہ کے استعمال کی چند اہم مثالیں ذیل میں درج ہیں

(۱) $\text{و} \text{لوگ لا} \text{ف} \text{ز} \text{لا} = \text{لا} \text{لوگ لا} - \text{و} \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ف} \text{ز} \text{لا}$

$= \text{لا} \text{لوگ لا} - \text{لا} \dots \dots \dots (۴)$

(۲) $\text{و} \text{لا} - \text{لا} \text{لا} \text{ف} \text{ز} \text{لا} \text{دریافت کرو۔}$

نتیجہ (۳) میں $\text{ع} = \text{لا} - \text{لا} \text{لا}$ رکھنے سے

$\text{و} \text{لا} - \text{لا} \text{لا} \text{ف} \text{ز} \text{لا} = \text{لا} \text{لا} - \text{لا} \text{لا} + \text{و} \frac{\text{لا} \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا} \text{لا}} \dots \dots \dots (۵)$

× اگر ہم $\frac{\text{ف} \text{و}}{\text{ز} \text{لا}}$ کی بجائے وکیس یعنی وکی بجائے عفا و تو اس کی شکل ہو جاتی ہے

عفا (ع و) - ع عفا و - عفا (ع عفا × عفا و)

$$\text{لیکن } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

$$(۶) \dots \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

(۶) اور (۵) کے حامل جمع کو بتدریج کرنے سے حامل ہوتا ہے کہ ۔

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا} \dots (۷)$$

ذہ ۹۷ مثال (۱) کے ساتھ مقابلہ کرو۔

بالکل اسی طریقہ سے ہمیں حامل ہونا چاہئے

$$(۸) \dots \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

$$\text{اور } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا} \dots (۹)$$

$$(۱۰) \dots \text{تکملوں پ} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا} \dots$$

کی قیمتیں دریافت کرنا ۔

$$(۱۱) \text{ میں } ۱ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

$$\text{پ} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

$$(۱۲) \dots \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

$$\text{اسی طرح ق} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

$$(۱۳) \dots \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ فرلا} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \text{ فرلا}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{پس صا پ} - \text{بما ق} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} \\ \text{صا پ} + \text{صما ق} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فرلا} \end{array} \right. \dots (۱۴)$$

$$\text{فوق جب بھلا فرلا} = \frac{\text{عما جب بھلا} - \text{بھلا جم بھلا}}{\text{عما} + \text{بھلا}} \times \text{فوق}$$

۸۱۔ متواتر حوصلے تکمیل :- بعض اوقات تکمیل بالخصوص یا کسی اور طریقہ سے ایک نکل کا حاصل دوسرے آسان نکل کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے۔

(۱۱) فرض کرو کہ $\int_a^b f(x) dx = 0$ ہو۔ $f(x)$ فرما..... (۱)

تو عن = $\frac{1}{\text{عنه}}$ و $\frac{\text{عنه}}{\text{لا}}$ - $\frac{1}{\text{عنه}}$ هو $\frac{1}{\text{عنه}}$ لا - $\frac{1}{\text{عنه}}$

$$= \frac{1}{\text{عم}} \text{مولا ن} - \frac{\text{ن}}{\text{عم}} \text{عن} - (2) \dots\dots\dots$$

اگر ن مثبت معجز عدد ہو تو اس ضابطہ کے مسلسل استعمال سے عن مکملہ
عج کی قوم میں پیمان ہو سکتا ہے

جہاں ع = \int قو $\frac{1}{\text{ع}}$ قو (۳)

مثال (۱) اگر $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ لہذا $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ (۴)

تو عن ۳ - لا قولاً + ن عن ۱ (۵)

مثلاً ع_١ - لا قو^{لا} + ع_٣ - لا قو^{لا} + ع_٤ - لا قو^{لا} + ع_٥ - لا قو^{لا} + ع_٦ - لا قو^{لا} + ع_٧

$$= -\lambda^2 \text{قو}^2 - \lambda^2 \text{قو}^3 + (-\lambda^2 \text{قو}^0 + \lambda^2) =$$

یعنی $3 \text{ لا}^2 \text{ قولا} - 3 - (\text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6) \text{ قولا}$

(۲) فرض کر دو کہ عن = لا ٲنجم بہ لا فرلا
اور وھ = لا ٲجب بہ لا فرلا

تو عن = $\frac{1}{بہ} جب بہ لا لا^۵ -$ $\frac{1}{ن} جب بہ لا لا^۵ ن لا^۵$ فلا

= $\frac{1}{بہ} جب بہ لا لا^۵ -$ $\frac{ن}{بہ} و$ (۷)

اور و = $\frac{1}{بہ} جم بہ لا لا^۵ -$ $\frac{1}{ن} جم بہ لا لا^۵ ن لا^۵$ فلا

= $\frac{1}{بہ} جم بہ لا لا^۵ +$ $\frac{ن}{بہ} عن$ (۸)

۱۸ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو ان ضابطوں کی مدد سے عن اور و معلوم
ہیٹکوں عریا و کے رقوم میں ظاہر ہوسکتے ہیں۔
مثال (۱۱)۔ پس اگر بہ = تو

عن = لا جب لا - ن و - اور و = لا جم لا + ن و (۹)

مثلاً ع = لا جب لا - ۳ و = لا جب لا - ۳ - لا جم لا + ۲ ع
= لا جب لا + ۳ لا جم لا - ۶ لا جب لا - و

یعنی $\frac{1}{ن} لا جم لا فلا = (لا - ۶ لا) جب لا + (۳ لا - ۶) جم لا$

(۳) اگر عن = $\frac{1}{ن} مس^۲ طه فرطه$ (۱۰)

= $\frac{1}{ن} مس^۲ طه - (قط طه - ۱) فرطه$

= $\frac{1}{ن} مس^۲ طه فرطه -$ $\frac{1}{ن} مس^۲ طه فرطه$

تو عن = $\frac{1}{ن} مس^۲ طه -$ عن (۱۱)

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو عن کی قیمت ن کے طاق یا جفت ہونے پر بالترتیب

ع = $\frac{1}{ن} مس^۲ طه فرطه =$ لوک نقط طه (۱۲)

یا ع = $\frac{1}{ن} فرطه =$ طه (۱۳)

پرخمصر ہوگی۔

اسی طرح اگر $و = ل م ط ف ط$ (۱۴)

تو ثابت ہو سکتا ہے کہ $و = ل م ط$ (۱۵)

۸۶۔ تحویلی ضابطے (سلسل)۔

(۱) فرض کرو کہ $ع = ل ج م ط ف ط$

تو $ع = ل ج م ط$ (فربج ط) = جب ط ج م ط

- جب ط م \times (ن) - (۱) ج م \times ط م - جب ط م ف ط م

= جب ط ج م ط + (ن) - (۱) ل (۱- ج م ط) ج م ط ف ط م

= جب ط ج م ط + (ن) - (۱) (ع - ۲ - ع) (ع - ۲ - ع)

دوسری طرف لجا کر ن پر تقسیم کرنے سے

$ع = ل ج م ط$ + $\frac{۱-ن}{ن}$ ع (۲)

اس ضابطہ کو تواتر استعمال کرنے سے ہر قدم پر قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے، اور آخر الامر اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو تحکمہ عن کی قیمت یا تو

$ع = ل ج م ط$ ف ط م = جب ط م (۳)

یا $ع = ل ف ط م = ط م$ (۴)

پرخمصر کجا سکتی ہے بوجب اسکے کہ ن طاق یا جفت ہو۔

(۲) اسی طریقہ پر اگر $و = ل ج م ط ف ط$ (۵)

تو $و = ل ج م ط$ ج م ط + $\frac{۱-ن}{ن}$ و (۶)

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو و کی قیمت

$$و = \text{رجب طہ فرطہ} = \text{جم طہ} \dots\dots\dots (۷)$$

$$یا و = \text{رجب طہ} = \text{طہ} \dots\dots\dots (۸)$$

پرلا کے منحصر کی جا سکتی ہے۔

$$(۳) \text{ یہی طریقہ فام تر شکل عم بن = رجب طہ جم طہ فرطہ} \dots\dots\dots (۹)$$

کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔

$$\text{اب عم بن} = \text{رجب طہ جم طہ} - \text{طہ فر (رجب طہ)}$$

$$= \frac{1}{1+m} \text{جب طہ جم طہ} - \frac{1}{1+m} \text{رجب طہ} \times (1-n) \text{جم طہ} \times \text{رجب طہ فرطہ}$$

$$= \frac{1}{1+m} \text{جب طہ جم طہ} - \frac{1}{1+m} \text{رجب طہ جم طہ} \times (1-n) \times \text{رجب طہ فرطہ}$$

$$= \frac{1}{1+m} \text{رجب طہ جم طہ} + \frac{1-n}{1+m} \text{رجب طہ جم طہ} \times (1-n) \times \text{رجب طہ فرطہ}$$

کسر دور کرنے اور ایک جنس رقموں کو اکٹھا کر کے $(1+m)$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عم بن} = \frac{1}{1+m} \text{جب طہ جم طہ} + \frac{1-n}{1+m} \text{رجب طہ} \times \text{عم بن} \dots\dots\dots (۱۰)$$

اسی طریقہ سے حاصل ہوگا

$$\text{عم بن} = \frac{1}{1+m} \text{جب طہ جم طہ} + \frac{1-n}{1+m} \text{رجب طہ} \times \text{عم بن} \dots\dots\dots (۱۱)$$

ضابطوں (۱۰) اور (۱۱) کے متواتر استعمال سے ہر قدم پر کوئی قوت نامہ بقدر کے گھٹایا جا سکتا ہے اور بالآخر اگر م اور ن مثبت مجموعہ ہوں تو مکمل عم بن کی قیمت فیصل کے چار شکلات میں سے کسی ایک پر منحصر کیا جاسکتی ہے۔

$$ع = \text{رجب طہ جم طہ فرطہ} = \frac{1}{1+m} \text{رجب طہ} \dots\dots\dots (۱۲)$$

یعنی $\frac{فا(ص۱)}{ف(ص۱)} = \frac{فا(ص۲)}{ف(ص۲)} = \dots = \frac{فا(صن)}{ف(صن)}$ (۷)

اب چونکہ (ن-۱) درجہ کے منطق صحیح تفاعل لاکہ (ن-۱) سے زیادہ جداگانه قیمتوں کے لئے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اس صورت کے جبکہ وہ متماثل مساوی ہوں، اس لئے ثابت ہوا کہ مستقلوں کی ان قیمتوں کے لئے (۵) مساوات متماثلہ ہے۔ پس

$$\frac{فا(لا)}{ف(لا)} = \frac{لا(لوک۱)}{لوک(لا۱)} + \frac{لا(لوک۲)}{لوک(لا۲)} + \dots + \frac{لا(لوک۸)}{لوک(لا۸)}$$

مثال (۱) $\frac{لا}{لا۴ - ۵لا۳ + ۴لا۲} = \dots = \frac{لا}{لوک(لا۹)}$ (۸) کی قیمت دریافت کرو۔

$$اب \quad \frac{لا}{لا۴ - ۵لا۳ + ۴لا۲} = \frac{لا}{لوک(لا۳) - ۵لا(لا۲) + ۴لا(لا)} + \dots$$

$$= \frac{لا}{لوک(لا۳)} + \frac{لا}{لوک(لا۲)} + \frac{لا}{لوک(لا)} + \dots (۱۰)$$

اگر سود صاف کی جائیں اور سروں کو مساوی رکھا جائے تو 'ج' کی قیمت دریافت کرنے کے لئے پانچ خطی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن اوپر کا طریقہ استعمال کرنا آسان تر ہے۔ اگر فرض کی ہوئی متماثلہ کو (لا-۱) سے ضرب دیا جائے اور پھر اس میں لا = ۱ رکھ دیا جائے تو اس کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے اور اسی طرح باقی سروں کے لئے۔

۱۸۵

$$پس \quad \frac{لا}{لا۴ - ۵لا۳ + ۴لا۲} = \frac{لا}{لوک(لا۳)} - \frac{لا}{لوک(لا۲)} + \frac{لا}{لوک(لا)} - \frac{لا}{لوک(لا۱)} + \dots (۱۱)$$

اس نتیجہ کی برآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔

$$اس لئے ریجسٹر نمبر $\frac{لا}{لوک(لا۳)} - \frac{لا}{لوک(لا۲)} + \frac{لا}{لوک(لا)} - \frac{لا}{لوک(لا۱)} + \dots + \frac{لا}{لوک(لا۸)}$$$

$$+ \frac{لا}{لوک(لا۷)} + \dots + \frac{لا}{لوک(لا۲)} + \dots (۱۳)$$

۱۸۶

اگر طرین کو (۱- لا) سے ضرب دیں اور پھر لا = ۱ رکھ دیں تو حاصل ہوتا ہے ج = ۱
نیز لا سے ضرب دیکر لا = ۰ رکھنے سے ب = ۱ دریافت ہوتا ہے۔ اب صرف
ا کی قیمت کسی اور طریقہ سے دریافت کرنا پاتی ہے۔ اگر مساوات (۴) کے دونوں
جانب لا سے ضرب دیں اور لا = ۰ کر دیں تو حاصل ہوتا ہے ا = ج = ۰ یعنی
ا = ۱ اس کے معادل طریقہ یہ ہے کہ کسر صاف کرنے کے بعد لا کے سروں کو مساوی
رکھا جائے۔ نیز لا کو کوئی خاص قیمت دے سکتے ہیں مثلاً لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$- ا + ب + ج = \frac{1}{1} = 1$$

اور پہلے نتیجوں کی مدد سے ا حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{پس } \int \frac{\text{فرلا}}{(لا-۱)^۲} = \int \left(\frac{1}{لا-۱} + \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا} \right) \text{فرلا}$$

$$= \text{لوک لا} - \frac{1}{لا} - \text{لوک (۱- لا)} \dots\dots\dots (۵)$$

$$\text{مثال (۲)۔} \int \frac{۱+لا^۲}{(۳-لا)(۲+لا)} \dots\dots\dots (۶) \text{ کی قیمت دریافت کرو۔}$$

فرض کرو کہ

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{ج}{(۳-لا)} + \frac{ب}{۳-لا} + \frac{ا}{۲+لا} = \frac{۱+لا^۲}{(۳-لا)(۲+لا)}$$

ستقلوں کے دریافت کرنے کے اجمالی طریقہ سے

$$ا = \frac{۱+۲-۳}{(۳-۲)۲} = \frac{۳}{۲۵} \quad ج = \frac{۱+۲}{۲+۳} = \frac{۳}{۵}$$

نیز لا سے ضرب دیکر لا = ۰ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ا + ب = ۰ \text{ یعنی } ب = -\frac{۳}{۲۵}$$

$$\text{اور اسلئے منظرہ = } \frac{۳}{۲۵} \text{ لوک (۲+لا)} + \frac{۳}{۲۵} \text{ لوک (۳-لا)} - \frac{۳}{۲۵} \dots\dots\dots (۸)$$

$$\text{مثال (۳)۔} \int \frac{لا^۲ \text{فرلا}}{(۱+لا)^۲} \dots\dots\dots (۹) \text{ کی قیمت دریافت کرو۔}$$

دفعہ ۷۷ (۳) کی یاد دہانی کی جاتی ہے کہ $\frac{لا^۲}{(۱+لا^۲)}$ کو لا کا تفاعل یا مکرمض معانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{(1+لا^۲)} - \frac{1}{1+لا^۲} = \frac{1-(1+لا^۲)}{(1+لا^۲)} = \frac{لا^۲}{(1+لا^۲)}$$

پس $\int \frac{لا^۲ فرلا}{(1+لا^۲)} = \int \frac{لا فرلا}{1+لا^۲} - \int \frac{لا فرلا}{(1+لا^۲)} = \frac{1}{2} \log (1+لا^۲) + \frac{1}{2} \log (1+لا^۲)$

(۱۰).....

۸۵۔ دو درجی اجزائے ضربی - مذکور بالا طریقے ہمیشہ استعمال ہو سکتے ہیں لیکن اگر ف (لا) کی کچھ اصلین خیالی ہوں تو اول تکملہ خیالی شکل میں حاصل ہوگا۔ اگر ہم خیالی جلوں پر غور کرنے سے پتہ چلا ہے کہ تو ذیل کے طریقے پر عمل کرنا چاہئے۔

ساداتوں کے نظریہ سے ہمیں معلوم ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) جسکے نام سے حقیقی ہوں پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزاء میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ پس

تفاعل $\frac{فا (لا)}{ف (لا)}$ (۱)

کو جزوی کسو میں تحلیل کرنے کی ضمن میں ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

(۱) ہر خطی جزو لا۔ عدا کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسی شکل ہے $\frac{۱}{لا - عدا}$ (۲)

(ب) ہر خطی جزو لا۔ بھا کے لئے جو درجہ تکرار پاتا ہے د کسو کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

(۳)..... $\frac{ب۱}{لا - ب۱} + \frac{ب۲}{(لا - ب۲)} + \dots + \frac{ب۱}{(لا - ب۱)}$

(ج) ہر دو درجی جزو لا + پ (لا + ق) کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسی شکل ہے

(۴)..... $\frac{ج (لا + د)}{لا + پ (لا + ق)}$

(۱۵) اور ہم دو درجی جزو لا + پ لا + ق کیلئے جو درجہ تکرار یا تہ ہے کسور کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

$$(۵) \dots \frac{\text{ج لا + د ر}}{(\text{لا + پ لا + ق})} + \dots + \frac{\text{ج لا + د ر}}{(\text{لا + پ لا + ق})} + \frac{\text{ج لا + د ر}}{(\text{لا + پ لا + ق})}$$

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اس طور پر مستطلات کی عین کافی تعداد حاصل ہوتی ہے تاکہ مسئلہ کے باہم مساوی رہنے کے طریقہ سے تفاعل (۱) کی جزوی کسور کے پورے نظام (۵) کے ساتھ مطابقت قائم ہو سکے۔

✽ اب صرف یہ غور کرنا باقی رہا ہے کہ جزوی کسر جس لا + د س (۶) ... (۶) ...

کا نامحدود مکملہ کس طرح دریافت کیا جائے۔ س = ا کی صورت پر دفعہ ۴ میں غور کیا جا چکا ہے اور عام صورت ایک تخیلی ضابطہ کی مدد سے اس شکل میں تحویل کی جاسکتی ہے۔ سب سے پہلے لہ اور مہ ایسے دریافت کئے جاسکتے ہیں کہ

$$(۴) \dots \frac{\text{جس لا + د س}}{(\text{لا + پ لا + ق})} = \text{لہ} + \frac{۲ \text{ لا + پ}}{(\text{لا + پ لا + ق})} + \frac{\text{مہ}}{(\text{لا + پ لا + ق})}$$

یعنی لہ = $\frac{۱}{۴}$ جس اور مہ = $\frac{۱}{۴}$ جس - $\frac{۱}{۴}$ پ جس (۸) ...

نتیجہ (۷) کے دائیں جانب کی پہلی رقم کا مکملہ ہے

(۹) ... $\frac{\text{لہ}}{۱} \times \frac{۱}{(\text{س} - ۱)}$ اور اب صرف ذیل کی قیمت معلوم کرنا باقی ہے

$$(۱۰) \dots \frac{\text{فر لا}}{(\text{لا + پ لا + ق})} - \frac{\text{فر ت}}{(\text{ت + ج})}$$

✽ ذیل کی بحث میرے مضمون کو مکمل کرنے کی غرض سے یہاں دی گئی ہے، علی طور پر اس کے استمال کی شاذ و نادر ضرورت پڑتی ہے۔ اس س کو مٹوی رکھنے سے طالب علم کو کوئی نقصان نہیں ہوگا۔
(۱۰) کھونے کے جملوں کو مکمل کرنے کا دوسرا طریقہ مثال (۱۲) میں آگے دیا گیا ہے۔

جبکہ ت = لا + $\frac{1}{p}$ پ اور ج = ق - $\frac{1}{p}$ پ (۱۱)

$$\frac{ت}{فرت} = \left\{ \frac{ت}{(ت + ج) - ۱} \right\} = \frac{۱}{(ت + ج) - ۱} - \frac{۱}{(ت + ج) - ۲}$$

$$= \frac{۱}{(ت + ج) - ۱} - \frac{۱}{(ت + ج) - ۲} \times (۲ - ۳) =$$

$$= \frac{(۳ - ۲)}{(ت + ج) - ۱} + \frac{ج}{(ت + ج) - ۲} \times (۲ - ۳) \dots (۱۲)$$

پس تکمل کرنے سے

$$\frac{ت}{(ت + ج) - ۱} - \frac{ج}{(ت + ج) - ۲} \times (۲ - ۳) = \frac{فرت}{(ت + ج) - ۱}$$

$$\frac{فرت}{(ت + ج) - ۱} = \frac{۱}{(ت + ج) - ۲} \times \frac{ت}{(ت + ج) - ۱} + \frac{ج}{(ت + ج) - ۲} \times \frac{فرت}{(ت + ج) - ۱}$$

..... (۱۳)

اس لیے پہلی ترقیم پر واپس آنے سے

$$\frac{لا + \frac{1}{p}}{(لا + پ + ق) - ۱} \times \frac{۱}{(ق - \frac{1}{p}) - ۱} = \frac{فرا}{(لا + پ + ق) - ۱}$$

$$+ \frac{(۳ - ۲)}{(لا + پ + ق) - ۱} \times \frac{فرا}{(لا + پ + ق) - ۱} \dots (۱۴)$$

ادری مطلوبہ تجویلی ضابطہ ہے۔ اس نتیجے کے متواتر اشمال سے ٹکڑہ (۱۰) کی قیمت آئیں

$$\frac{فرا}{(لا + پ + ق) - ۱} \dots (۱۵)$$

پر لا کے خصص کی جاسکتی ہے اور اس ٹکڑہ (۱۵) کی قیمت دفعہ ۵ سے معلوم ہے۔

$$\text{مثال (۱۱)} \quad \frac{فرا}{(لا + پ + ق) - ۱} \dots (۱۶) \quad \text{کی قیمت دریافت کرو۔}$$

نسب نامہ کے دو درجہ دوم کے اجزا (لا + لا + ۱) اور (لا - لا + ۱) ہیں اور ان کی مزید تحلیل نہیں ہو سکتی۔

اس لئے اوپر کے قاعدہ کے مطابق ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$(۱۷) \dots\dots\dots \frac{۱}{لا^۲ + لا + ۱} = \frac{ا + لا + ج}{لا + لا + ۱} + \frac{ج + لا + ک}{لا^۲ - لا + ۱}$$

یعنی ۱ = (ا + لا + ج) (لا - لا + ۱) + (ج + لا + ک) (لا + لا + ۱) لا کی مختلف قوتوں کے سرسادی رکھنے سے

۱۸۹

$$= (ج + لا + ک) (لا + لا + ۱) + (ا + لا + ج) (لا - لا + ۱)$$

$$ا + ج - ج - لا + ک + لا + ۱ = ا + ج + لا + ک + ۱$$

پس ۱ = ج = ج = ۱ اور ج = ک = ۱ (۱۸)
اب دفعہ ۵ کے طریقہ سے مکمل دریافت ہو سکتا ہے۔ چنانچہ

$$ک \int \frac{لا}{لا^۲ + لا + ۱} = \frac{۱}{۲} \int \frac{۱ + لا}{لا^۲ + لا + ۱} - \frac{۱}{۲} \int \frac{۱ - لا}{لا^۲ - لا + ۱} فرلا$$

$$= \frac{۱}{۴} \int \frac{۱ + (۱ + لا)^۲}{لا^۲ + لا + ۱} فرلا - \frac{۱}{۴} \int \frac{۱ - (۱ - لا)^۲}{لا^۲ - لا + ۱} فرلا$$

$$= \frac{۱}{۴} لوک (لا - لا + ۱) - \frac{۱}{۴} لوک (لا + لا + ۱) + \frac{۱}{۴} \int \frac{فرلا}{لا^۲ + لا + ۱} + \frac{۱}{۴} \int \frac{فرلا}{لا^۲ - لا + ۱}$$

$$= \frac{۱}{۴} لوک (لا - لا + ۱) + \frac{۱}{۴} لوک (لا + لا + ۱) + \frac{۱}{۴} (س - س) + \frac{۱}{۴} (س - س) (۱ - لا)$$

$$(۱۹) \dots\dots\dots = \frac{۱}{۴} لوک (لا - لا + ۱) + \frac{۱}{۴} لوک (لا + لا + ۱) + \frac{۱}{۴} س - \frac{۱}{۴} س (۱ - لا)$$

مثال (۲) $\int \frac{فرلا}{(لا + ۱)^۲}$ (۲۰) کی قیمت دریافت کرو۔

نتیجہ (۱۴) کے مطابق انکی قیمت دریافت ہو سکتی ہے لیکن ذیل کا طریقہ زیادہ آسان ہے۔
اگر لا = س طرہ رکھا جائے تو

$$\int \frac{فرلا}{(۱+لا)^۲} = \int جم^۲ طه فرطه = \int \frac{۱}{۲} (۱+جم^۲ طه) فرطه$$

$$\frac{۱}{۲} طه + \frac{۱}{۲} جب طه = \frac{۱}{۲} سس^۱ لا + \frac{۱}{۲} \times \frac{لا}{(۱+جم^۲)} \dots\dots\dots (۲۱)$$

۸۶ - غیر منطبق تفاعلوں کا مکمل :- اس بارے میں ذیل کے نتیجے اہم ہیں

(۱) جب تفاعلوں کی صورت میں جنہیں متغیر کی کسری قوتوں کے سوائے اور کوئی غیر منطبق مقدار نہیں ہے اہم

$$لا = ت^۲ \text{ اور } \frac{فرلا}{فرت} = م ت^۲ - ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

کہہ سکتے ہیں جہاں کسری قوت غاؤں کے نسب نامہ کا ذوا ضفاف اقل م ہے اور سوال اس طور پر ت کے منطبق تفاعل کے مکمل میں بدل جاتا ہے۔

$$(۲) لا \text{ اور } لا کا کوئی منطبق تفاعل جہاں } لا = ۲ + لا + ب لا \dots\dots\dots (۲)$$

ابداً ۱ + ب لا = ت^۲ اور $\frac{فرلا}{فرت} = \frac{ت^۲}{ب}$ (۳) کے ذریعہ مکمل ہو سکتا ہے۔

$$\text{پس } \int فا (لا، ۲) = \int فا (ت^۲ - ۱) = \int فا \left(\frac{ت^۲}{ب} - ۱ \right) = \frac{ت^۲ فرت}{ب} \dots\dots (۴)$$

اور مکمل کی علامت کے اندر کات کا تفاعل منطبق ہے۔

مثال (۱) $\int \frac{لا فرلا}{۱+لا} کی قیمت دریافت کرو۔$
اگر لا = ت^۲ رکھیں تو

$$\int \frac{لا فرلا}{۱+لا} = \int \frac{ت^۲ فرت}{۱+ت^۲} = \int (ت^۲ - ۱) فرت = \int ت^۲ فرت - \int فرت$$

$$= \frac{۲}{۳} ت^۳ - ت^۲ + ت - ۲ لوگ (۱+ت) = \frac{۲}{۳} لا^{\frac{۳}{۲}} - لا + ۲ - ۲ لوگ (۱+لا)$$

$$\text{جس سے لا} = \text{ع} + \frac{\text{ب} - \text{ع}}{\text{ا} - \text{ت}} \text{ اور } \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{۲(\text{ب} - \text{ع})}{\text{ا} - \text{ت}} \dots (۱۱)$$

اور $\sqrt{\text{لا} + \text{پ} + \text{ق}}$

$$(۱۲) \dots \dots \dots \frac{\text{ت} + (\text{ب} - \text{ع})}{\text{ا} - \text{ت}} = (\text{لا} - \text{ع}) \text{ ت} =$$

اگر منفی ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$(۱۳) \dots \dots \dots \sqrt{\text{ق} + \text{پ} - \text{لا}} - \sqrt{\text{ا} - \text{ت}} = \text{لا}$$

جہیں $\text{پ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور $\text{ق} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ اگر فیثقیلی ہے تو لازماً $\text{ق} + \text{پ} - \text{لا} = \text{لا}$ کے اجزاء ضربی فیثقیلی ہونے چاہئیں۔ ورنہ اسکی خلاف صورت میں لا کی تمام قیمتوں کے لئے اس جملہ کی علامت ایک ہی رہے گی اور ظاہر ہے کہ لا کی کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے یہ جملہ منفی ہے اس لئے اسکی قیمت ہمیشہ منفی ہوگی۔

پس $\text{ق} + \text{پ} - \text{لا} = \text{لا} = (\text{لا} - \text{ع}) (\text{ب} - \text{ع}) \dots (۱۴)$

جس میں ع اور ب حقیقی ہیں۔ فرض کرو کہ

$$(۱۵) \dots \dots \dots \text{ب} - \text{ع} = \text{لا} = (\text{لا} - \text{ع}) \text{ ت} \dots \dots \dots$$

$$\text{تو } \text{لا} = \text{ع} + \frac{\text{ب} - \text{ع}}{\text{ا} - \text{ت}} \text{ اور } \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{۲(\text{ب} - \text{ع})}{\text{ا} + \text{ت}} \dots (۱۶)$$

$$\text{اور } \sqrt{\text{ق} + \text{پ} - \text{لا}} = (\text{لا} - \text{ع}) \text{ ت} = \frac{(\text{ب} - \text{ع}) \text{ ت}}{\text{ا} + \text{ت}} \dots (۱۷)$$

اب ظاہر ہے کہ ان ابدالوں سے فلا (لا) $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$ تغیرت کا منطقی تفاعل ہو جاتا ہے۔

اور کی تحقیقات ایک جیتک اہمیت رکھتی ہے کیونکہ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ فیثقیل محمل کے تفاعل محمل ہو سکتے ہیں اور ان سے خاص قسم کے نتیجے حاصل ہوتے ہیں لیکن خاص خاص صورتوں میں عملی طور پر محمل دیگر طریقوں سے آسانی سے عمل میں آسکتا ہے۔

اس باب کے دوران میں ایسی کئی مثالیں آچکی ہیں۔ اور نمونے کے طور پر ایک اور دو مثالیں یہاں دی جاتی ہیں۔
مثال (۳)۔ ۱۔ نسب ماکو نامی بنائے سے

$$\int \frac{فرلا}{\sqrt{1+لا+لا^2}} = \int \{ \sqrt{1+لا} - لا \} فرلا$$

$$= \frac{2}{3} (1+لا)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} لا^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{مثال (۴)۔ ۱۔} \int \frac{فرلا}{\sqrt{1-لا+لا^2}} = \int \{ لا - \sqrt{1-لا} \} فرلا$$

۱۹۲

$$= \frac{1}{4} لا^2 - \int \sqrt{1-لا} فرلا$$

$$= \frac{1}{4} لا^2 - \frac{1}{4} لا \sqrt{1-لا} + \frac{1}{4} \int \sqrt{1-لا}$$

بظریہ دیگر لا = جنم فرم رکھنے سے مکملہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\int \sqrt{1-لا} فرم = \int \sqrt{1-لا} فرم + \int \sqrt{1-لا} فرم$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-لا)^{\frac{1}{2}} فرم = \frac{1}{4} \int (1-لا)^{\frac{1}{2}} فرم + \frac{1}{4} \int (1-لا)^{\frac{1}{2}} فرم$$

اور اسالی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دونوں نتیجوں میں صرف متعلق کا فرق ہے۔

امثلہ ۲۳

ذیل کے جملوں کے نامحدود کمالات دریافت کرو اور تفریق کر کے انکی تصدیق کرو۔

$$(۲) \quad \frac{1}{\sqrt{1-لا^2}}, \quad \frac{1}{1-لا^2}$$

$$(۱) \quad \frac{1}{لا-1}, \quad \frac{1}{(لا-1)^2}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{لا}, \quad \frac{1}{لا^2}, \quad \frac{لا+1}{لا}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{(لا-1)^2}, \quad \frac{1}{(لا-1)}$$

- (۵) $\frac{1}{\sqrt{n^2-3n}}, \frac{1}{\sqrt{n+2}}$
- (۶) $\frac{n+1}{n^2}, \frac{n+1}{n}$
- (۷) $\frac{n+2}{n-3}, \frac{n-1}{n+3}$
- (۸) $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2$
- (۹) $\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1}$
- (۱۰) $\frac{n^2}{n-1}, \frac{n^2}{n+1}$
- (۱۱) $\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1}$
- (۱۲) $\text{جم}^2 \text{ لا}, \text{مم}^2 \text{ لا}$
- (۱۳) $\text{جم}^2 \text{ لا} - \text{جبل}^2 \text{ لا}$
- (۱۴) $\text{جم}^2 \text{ لا}, \text{جبل}^2 \text{ لا}$
- (۱۵) $\text{منزل}^2 \text{ لا}, \text{منزل}^2 \text{ لا}$
- (۱۶) $\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1}$

اشد ۲۴

حرکیاتی سوالات

(۱) ایک ذرہ قانون $\frac{\text{فرس}}{\text{ثرت}} = \text{ج} - \text{ب}$ کے مطابق حرکت کر رہا ہے۔ ثابت

کر دو کہ ساکن ہونے سے پہلے وہ فاصلہ $\frac{6}{\text{ج}}$ طے کریگا۔ (ج اسراع بجاؤ باض)

(۲) اگر ایک نقطہ سکون سے وقت $t = 0$ پر مستقل اسراع کے ساتھ حرکت شروع کرے اور کسی وقفہ کے بعد اسکی رفتار v ہو اور اس وقفہ کے اندر اوسط رفتار \bar{v} ہو تو

ثابت کر دو کہ $\bar{v} = \frac{1}{2} v$

(۳) سوال (۲) کی ترقیم میں اگر اسراع a کے متناسب ہو تو

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v \times \frac{1}{n+1}$$

(۴) ایک ذرہ کی حرکت کا قانون $\frac{\text{فرس}}{\text{ثرت}} = \text{ج} - \text{ب}$ ہے۔ ثابت کر دو کہ

ت۔۔ سے ساکن ہونے تک فاصلہ $\frac{و}{ن}$ ملے ہوگا۔

(۵) اگر مزاحم واسطیں متحرک ذرہ کی رفتار $\frac{فرس}{فرت}$ = و۔ قوت ہو تو ثابت کرو کہ ذرہ وقت ت۔۔ کے مقام سے فاصلہ $\frac{و}{ن}$ کبھی ملے نہیں کر سکتا۔

(۶) ایک ذرہ قانون $\frac{فرس}{فرت}$ = و۔ قوت جسم ن ت کے مطابق حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ ت۔۔ سے ساکن ہونے تک فاصلہ $\frac{ن قوت + ک}{ن + ک}$ ملے کرتا ہے۔

(۷) ثابت محور کے گرد گھومنے والے جسم کی زاویہ رفتار $\frac{فطر}{فرت}$ = ۲ ن قطرن ت ثابت کرو کہ اگر ط = ۰۔ وقت ت = ۰۔ تو ط = ۴ سن ا قوت = ۲

امثلہ ۲۵

(درجہ دوم کے نسب نما)

$$(۱) \int \frac{۱+۱}{۲+۱} فرلا = سن^۱ لا + لوک \sqrt{۱+۱} لا$$

$$(۲) \int \frac{۲ لا}{۲+۱} فرلا = \frac{۱}{۲} لا^۲ - لوک \sqrt{۱+۱} لا$$

$$(۳) \int \frac{۲ لا}{۲-۱} فرلا = - \frac{۱}{۲} لا^۲ - لوک \sqrt{۱-۱} لا$$

$$(۴) \int \frac{فرلا}{۲+۱} = سن^۱ (۲-۱) لا$$

$$(۵) \int \frac{فرلا}{۲+۱} = لوک \frac{۱+۲}{۱+۱}$$

$$(۶) \int \frac{۳+۲۱}{۵+۲۱-۲۱} فرلا = \frac{۳}{۲} لوک (۲-۲۱+۵) + \frac{۳۴}{۳۱۲} ستر \frac{۳-۲۱}{۳۱۲}$$

$$(۷) \int \frac{۱-۲۱}{۲+۲۱+۲۱} فرلا = لوک (۲+۲۱+۲۱) - \frac{۳}{۲۱} ستر \frac{۱+۲۱}{۲۱}$$

$$(۸) \int \frac{(۱+۲)+۱}{۱+۲-۲} فرلا = لوک (۱-۲+۱) + \frac{۲}{۳۱} ستر \frac{۱-۲۱}{۳۱}$$

$$(۹) \int \frac{۱+۲}{۲(۱-۲)} فرلا = لوک (۱-۲) - \frac{۲}{۱-۲}$$

$$(۱۰) \int \frac{لا فرلا}{(۸+۲)+۲} = لوک \frac{۲(۲+۲)}{(۲+۲)}$$

$$(۱۱) \int \frac{(۱-۲)}{(۲-۲)(۳-۲)} فرلا = لا - ۲ لوک (۲-۲) + ۸ لوک (۳-۲)$$

$$(۱۲) \int \frac{(۱+۲)+۱}{۱-۲-۲} فرلا = لا + \frac{(۲)}{(۵)} لوک (۱-۲-۲) - \frac{(۲)}{(۵)} لوک (۱-۲-۲)$$

$$(۱۳) \int \frac{(۲)-۱}{۲-۱-۱} فرلا = لا + \frac{(۲)}{۳} + \frac{(۲)}{۵} + \dots + \frac{۱}{۱-۳۲} \frac{۱-۳۲}{۱-۳۲}$$

$$(۱۴) \int \frac{(۱-۱)-۱}{۲-۱+۱} فرلا = لا - \frac{۱}{۳} + \frac{(۲)}{۵} + \dots + \frac{۱}{۱-۳۲} \times \frac{۱-۳۲}{۱-۳۲}$$

امثل ۲۶

$$(۱) \int \frac{فرلا}{۳-۲۱} = \frac{۱}{۲۱} جبّا \frac{۳}{۲۱} لا$$

$$(۲) \int \frac{فرلا}{۳+۲۱} = \frac{۱}{۳۱} جبّا \frac{۳}{۲۱} لا$$

$$(۳) \int \frac{فرلا}{لا(۱-۲)} = جبّا (۲-۱) لا$$

$$(۴) \int \frac{فرلا}{(۱+لا)۲} = جنز (۱+لا)$$

$$(۵) \int \frac{فرلا}{(۱-لا)۲} = جنز (۱-لا)$$

$$(۶) \int \frac{فرلا}{لا۲+لا+۱} = \frac{۱}{۳لا} جنز \frac{۱+لا۳}{لا}$$

$$(۷) \int \frac{فرلا}{لا۳-لا+۱} = \frac{۱}{۳لا} جنز \frac{۱-لا۳}{لا}$$

$$(۸) \int \frac{فرلا}{لا۲-لا} = جنم (۱ - \frac{لا}{لا})$$

$$(۹) \int \frac{لا-۱}{لا} فرلا = \frac{لا-۱}{لا} + \frac{۱}{۲} جنز \frac{لا-۱}{لا}$$

$$(۱۰) \int \frac{لا+۱}{لا-۱} فرلا = جنز \frac{لا-۱}{لا-۱}$$

$$(۱۱) \int \frac{لا+۱}{لا-۱} فرلا = جنز \frac{لا-۱}{لا-۱} + جنز لا$$

امشله ۲

متغیر کی تبدیلی

$$(۱) \int \frac{لا فرلا}{لا-۱} = \frac{۱}{۳لا} لوک \frac{۱}{لا-۱}$$

$$(۲) \int \frac{لا فرلا}{لا-۱} = \frac{۱}{۴لا} لوک \frac{لا+۱}{لا-۱}، \int \frac{لا فرلا}{لا+۱} = \frac{۱}{۳لا} مس لا$$

$$(۳) \int \frac{لوک لا فرلا}{لا} = \frac{۱}{۲} (لوک لا)$$

$$(۲) \quad \text{ج ب لا جم لا فر لا} = \frac{۱}{۲} \text{ج ب لا}$$

$$(۵) \quad \text{ج ب لا} = \frac{\text{ج ب لا}}{۱-۱} \text{فر لا} = \frac{۱}{۲} (\text{ج ب لا})$$

$$(۶) \quad \text{ج ب لا} = \frac{\text{ج ب لا}}{۱-۱} \text{فر لا} = \text{لوک (ا ب ج لا)}$$

$$\text{ج ب لا} = \frac{\text{ج ب لا}}{۱-۱} = \frac{۱}{۲} \text{لوک (لو + ب ج لا)}$$

$$(۷) \quad \text{ج ب لا جم لا فر لا} = \frac{۱}{۳} \text{ج ب لا}$$

$$(۸) \quad \text{ج ب لا جم لا} = \frac{\text{ج ب لا}}{۱-۱} \text{فر لا} = \frac{۱}{۲} \text{لوک (ا ج ب لا + ب ج لا)}$$

$$(۹) \quad \text{مس لا فر لا} = \frac{۱}{۲} \text{مس لا + لوک جم لا}$$

$$(۱۰) \quad \text{ج ب لا} = \frac{\text{ج ب لا}}{۱-۱} \text{فر لا} = \frac{۱}{۳} \text{قط لا}$$

$$(۱۱) \quad \text{قط لا فر لا} = \text{مس لا} + \frac{۱}{۳} \text{مس لا}$$

$$(۱۲) \quad \text{قط لا + مس لا} = \text{فر لا} = \text{لوک} = \frac{۱}{۱-۱} \text{ج ب لا}$$

$$\text{قط لا - مس لا} = \text{فر لا} = \text{لوک (ا ب ج لا)}$$

$$(۱۳) \quad \text{فر لا} = \frac{\text{فر لا}}{۱-۱} \text{م م لا} = \frac{۱}{۲} \text{فر لا} = \text{م م لا - ق م لا}$$

$$(۱۴) \quad \text{فر لا} = \frac{\text{فر لا}}{۱-۱} \text{مس لا - قط لا} = \frac{۱}{۱-۱} \text{مس لا + قط لا}$$

$$(۱۵) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم لا}} = \text{مس لا} - \text{مم لا}$$

$$(۱۶) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم لا}} = \text{قط لا} + \text{لوک مس لا}$$

$$(۱۷) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم لا}} = \frac{۱}{۲} \text{قط لا} + \text{لوک مس لا}$$

$$(۱۸) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{مس لا}} = \frac{۱}{۲} \text{لا} + \frac{۱}{۲} \text{لوک رجیم لا} + \text{جب لا}$$

$$(۱۹) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم لا}} = \frac{۱}{۲} \text{سن} - \frac{۱}{۲} \text{مس لا}$$

$$(۲۰) \int \frac{\text{لا لا لا لا لا لا}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۴} (\text{لا} + \text{لا})$$

$$(۲۱) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا لا لا لا لا لا}} = \frac{۱}{۴} \text{لوک لا}$$

$$(۲۲) \text{زایدی ابدالوں سے} \int \frac{\text{لا لا لا لا لا لا}}{\text{فرلا}} \text{ اور } \int \frac{\text{لا لا لا لا لا لا}}{\text{فرلا}} \text{ کی قیمتیں}$$

دریافت کرو۔

$$(۲۳) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا لا لا لا لا لا}} = \frac{\text{لا لا لا لا لا لا}}{\text{لا لا لا لا لا لا}}$$

$$(۲۴) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا لا لا لا لا لا}} = \frac{\text{لا لا لا لا لا لا}}{\text{لا لا لا لا لا لا}}$$

$$(۲۵) \int \frac{\text{لا لا لا لا لا لا}}{\text{لا لا لا لا لا لا}} = \frac{۱}{۴} (\text{لا لا لا لا لا لا})$$

امثله ۲۸

تکمل بالخصص

$$(۱) \quad \text{لا فولا} \text{ لا فولا} = ۱ (لا - ۱) \text{ فولا}$$

$$(۲) \quad \text{لا لوگ لا فولا} = \frac{۱}{۲} \text{ لا} (لوگ لا - \frac{۱}{۲})$$

$$(۳) \quad \text{لا}^۱ \text{ لوگ لا فولا} = \frac{\text{لا}^{۱+۲}}{۱+۲} (لوگ لا - \frac{۱}{۱+۲})$$

$$(۴) \quad \text{لا جب لا فولا} = \text{لا جم لا} + \text{جب لا}$$

$$(۵) \quad \text{لا جم لا فولا} = \text{لا جب لا} + \text{جم لا}$$

$$(۶) \quad \text{لا جب لا جم لا فولا} = \frac{۱}{۲} \text{ لا جم لا} + \frac{۱}{۲} \text{ جب لا}$$

$$(۷) \quad \text{لا جم لا جم لا فولا} = \frac{\text{لا جم لا} \text{ لا جم لا} - \text{جم لا} \text{ لا جب لا}}{\text{م}^۲ - \text{ن}^۲}$$

$$(۸) \quad \text{لا جب لا جب لا فولا} = \frac{\text{لا جب لا} \text{ لا جم لا} - \text{جم لا} \text{ لا جب لا}}{\text{م}^۲ - \text{ن}^۲}$$

$$(۹) \quad \text{لا جب لا جم لا فولا} = \frac{\text{لا جم لا} \text{ لا جم لا} + \text{لا جب لا} \text{ لا جب لا}}{\text{م}^۲ - \text{ن}^۲}$$

$$(۱۰) \quad \text{لا جب لا فولا} = \text{لا جب لا} + \text{لا} - ۱$$

$$(۱۱) \quad \text{لا مس لا فولا} = \text{لا مس لا} - \text{لوگ لا} + ۱$$

$$(۱۲) \quad \text{لا قط لا فولا} = \text{لا قط لا} - \text{جنز لا}$$

$$(۱۳) \quad \text{لا سس} - \text{لا فرلا} = \frac{1}{4} (1 + \text{لا}^2) \text{ سس} - \text{لا} - \frac{1}{4} \text{ لا}$$

$$(۱۴) \quad \text{لا قط} - \text{لا فرلا} = \text{لا سس} + \text{لا} + \text{لوک جم لا}$$

$$(۱۵) \quad \frac{\text{لا} + \text{جب لا}}{1 + \text{جم لا}} \text{ فرلا} = \text{لا سس} \frac{\text{لا}}{4}$$

$$(۱۶) \quad \frac{\text{لا جب} - \text{لا فرلا}}{1 - \text{لا}^2} = - \frac{1}{2} (1 + \text{لا}^2) \text{ جب} - \text{لا} + \text{لا}$$

$$(۱۷) \quad \text{جم لا جم لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جب لا جم لا} + \text{جم لا جب لا})$$

$$(۱۸) \quad \text{جب لا جب لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جم لا جب لا} - \text{جب لا جم لا})$$

$$(۱۹) \quad \text{جم لا جب لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جب لا جب لا} - \text{جم لا جم لا})$$

$$(۲۰) \quad \text{جب لا جم لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جم لا جم لا} + \text{جب لا جب لا})$$

$$(۲۱) \quad \text{فوجب لا جم لا فرلا} = \frac{1}{11} (\text{جب}^2 \text{ لا} - 2 \text{ جم}^2 \text{ لا}) \text{ فو}$$

$$(۲۲) \quad \text{لا فو لا فرلا} = - (\text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 + \text{لا}^9 + \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11}) \text{ فو}$$

$$(۲۳) \quad \text{لا جب لا فرلا} = - (\text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 + \text{لا}^9 + \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11}) \text{ جب لا}$$

$$(۲۴) \quad \text{اگر عن} = \text{لا} \text{ جم لا فرلا اور ون} = \text{لا} \text{ جن لا فرلا}$$

تو ثابت کرد کہ عن = لا جن لا - ن و اور ون = لا جن لا - ن ع - ۱

اس کی مدد سے ہم اور وہ کی قیمتیں دریافت کرو

$$\{ \text{عن} = (\text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 + \text{لا}^9 + \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11}) \text{ جن لا} - (\text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 + \text{لا}^9 + \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11}) \text{ جم لا} \}$$

$$\text{وہ} = (\text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 + \text{لا}^9 + \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11}) \text{ جن لا} - (\text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 + \text{لا}^9 + \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11}) \text{ جب لا}$$

(۲۵) اگر ع متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے تو ثابت کرو کہ

(۲۶) سرول ا اور جب کی قیمت دریافت کرو کہ

$$\frac{\text{فرلا}}{(ا + ب \cdot \text{جم لا})} = \frac{\text{اجب لا}}{(ا + ب \cdot \text{جم لا})} + \frac{\text{ب}}{(ا + ب \cdot \text{جم لا})}$$

$$[ا = \frac{ب}{ا + ب \cdot \text{جم لا}}]$$

مشد ۲۹

(منطق کسور)

(۱) $\frac{\text{فرلا}}{(ا - لا)} = \frac{\text{لوک}}{(ا - لا)}$

(۲) $\frac{\text{فرلا}}{(ا - لا)} = \frac{۲ + لا}{(ا - لا)(ا + لا)}$

(۳) $\frac{۱}{۲} = \frac{\text{فرلا}}{(ا - لا)(ا + لا)}$

(۴) $\frac{۳ - لا}{(ا - لا)(ا + لا)} = \frac{۵}{۲} = \frac{\text{فرلا}}{(ا - لا)(ا + لا)}$

(۵) $\frac{۱}{۴} = \frac{\text{فرلا}}{(ا - لا)(ا + لا)}$

(۶) $\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳} = \frac{\text{فرلا}}{(ا - لا)(ا + لا)}$

(۷) $\frac{۱}{۴} = \frac{\text{فرلا}}{(ا - لا)(ا + لا)}$

$$\frac{\text{ج لوک (لا-ج)}}{(\text{ج-ل})(\text{ج-ب})} + \frac{\text{ب لوک (لا-ب)}}{(\text{ب-ج})(\text{ب-ل})}$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ل}^2)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{1}{\text{ج}^2 - \text{ل}^2} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}} \text{سن}^{\frac{1}{\text{ل}}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} \text{سن}^{\frac{1}{\text{ب}}} \right) \quad (۸)$$

$$\int \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ل}^2)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{1}{(\text{ب}^2 - \text{ل}^2)} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} \quad (۹)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ل}^2)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{1}{\text{ل}^2 - \text{ب}^2} \left(\text{لوسن}^{\frac{1}{\text{ل}}} - \text{بسن}^{\frac{1}{\text{ب}}} \right) \quad (۱۰)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ل}^2)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{1}{\text{ل}^2 - \text{ب}^2} \left\{ \text{ل لوک (لا}^2 + \text{ل}^2) \right. \quad (۱۱)$$

$$\left. - \text{ب لوک (لا}^2 + \text{ب}^2) \right\}$$

$$\int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{ل}^2(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{2}{\text{ل}^2 + \text{ب}^2} + \frac{\text{لوک}}{(1 + \text{ل})} \quad (۱۲)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{\text{ل}^2(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{2}{\text{ل}^2 + \text{ب}^2} + \frac{\text{لوک}}{(1 + \text{ل})} \quad (۱۳)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ل}^2(\text{لا}^2 - \text{ل}^2)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{1}{\text{ل}^2} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{(1 - \text{ل})} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \text{ل})} \quad (۱۴)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ل}^2(1 - \text{ل}^2)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \text{ل}^2)} + \frac{1}{\text{ل}^2} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{(1 - \text{ل})} \quad (۱۵)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ل}^2(\text{لا}^2 - 1)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = \frac{2 - \text{لا}}{(\text{لا} - 1)(\text{لا} + 1)} + 2 \text{لوک} \frac{\text{لا}}{\text{لا} - 1} \quad (۱۶) \quad ۱۹۹$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{\text{ل}^2(1 - \text{ل}^2)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \text{ل}^2)} - \frac{1}{\text{ل}^2} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{(1 - \text{ل})} \quad (۱۷)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ل}^2(\text{لا}^2 - 1)(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} = -\frac{3}{2} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{(1 - \text{ل})} - \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \text{ل}^2)} \quad (۱۸)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(1+\text{لا})^3} = -\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{2\text{لا}^2} - \frac{1}{\text{لوک}} + \frac{1}{\text{لوک}}(1+\text{لا}) = \text{لوک لا} \quad (19)$$

$$\int \frac{2+\text{لا}}{(1+\text{لا})^3} = \text{فرلا} = \frac{2}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2} - \frac{2}{1+\text{لا}} + \frac{1}{\text{لوک}} = \frac{1}{\text{لوک}}(1+\text{لا})^2 - \frac{2}{1+\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2} \quad (20)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(1-\text{لا})^3} = \frac{3}{14} \text{لوک} + \frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}} + \frac{3}{8} \times \frac{\text{لا}}{1-\text{لا}} - \frac{1}{3} \times \frac{\text{لا}}{(1-\text{لا})^2} \quad (21)$$

$$\int \frac{1+\text{لا}}{\text{لا}(1+\text{لا})} - \text{فرلا} = \text{لوک} \frac{\text{لا}}{2\text{لا}+1} + \text{مس لا} \quad (22)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}-1} = \frac{1}{\text{لوک}} \frac{1+\text{لا}}{\text{لا}-1} + \frac{1}{2} \text{مس لا} \quad (23)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{\text{لا}-1} = \frac{1}{\text{لوک}} \frac{1+\text{لا}}{\text{لا}-1} - \frac{1}{2} \text{مس لا} \quad (23)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+1} = \frac{1}{\text{لوک}} \frac{1+\text{لا}}{\text{لا}+1} + \frac{1}{3} \text{مس لا} \quad (25)$$

$$\int \frac{\text{لا} \text{فرلا}}{\text{لا}+1} = \frac{1}{\text{لوک}} \frac{1+\text{لا}}{\text{لا}+1} + \frac{1}{3} \text{مس لا} \quad (26)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(1+\text{لا})(\text{لا}+1)} = \frac{1}{2} \text{لوک} (1+\text{لا}) - \frac{1}{\text{لوک}} (1+\text{لا}) + \frac{1}{2} \text{مس لا} \quad (26)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{(1+\text{لا})(\text{لا}+1)} = \frac{1}{2} \text{لوک} (1+\text{لا}) + \frac{1}{\text{لوک}} (1+\text{لا}) - \frac{1}{2} \text{مس لا} \quad (27)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{\text{لا}^2-\text{لا}+1} = \frac{1}{\text{لوک}} \frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}} + \frac{2}{3} \text{مس لا} \quad (29)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{\text{لا}^2+\text{لا}+1} = \frac{1}{\text{لوک}} (2+\text{لا}) - \frac{1}{\text{لوک}} (1+\text{لا}) \quad (30)$$

$$\int \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{(1+\text{لا})(1-\text{لا})} = \frac{1}{2} \text{لوک} (1-\text{لا}) - \frac{1}{\text{لوک}} (1+\text{لا}) + \frac{1}{2} \text{مس لا} \quad (31)$$

$$\int \frac{لا^۲ - ۱}{لا^۲ + لا + ۱} فرلا = \frac{۱}{۲} لوک \frac{لا^۲ - لا + ۱}{لا^۲ + لا + ۱} \quad (۳۲)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۴ + لا^۳} = مسن لا + \frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا^۳} \quad (۳۳)$$

$$\int \frac{لا^۳ فرلا}{لا^۴ + لا^۳} = \frac{لا^۲ + ۱}{۲(لا^۴ + لا^۳)} \quad (۳۴)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۴ + لا^۳} = \frac{فرلا}{لا^۴ + لا^۳} - \frac{۳ + ۲(لا^۲)}{۲(لا^۴ + لا^۳)} + \frac{۳}{۲} مسن لا \quad (۳۵)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۴ + لا^۳} = \frac{۱}{لا^۴} لوک \frac{لا^۲ + لا + ۱}{لا^۴ + لا^۳} \quad (۳۶)$$

$$+ \frac{۱}{لا^۲} مسن \frac{لا^۲ + ۱}{لا^۴ + لا^۳}$$

$$\int \frac{لا^۲ فرلا}{لا^۴ + لا^۳} = \frac{۱}{لا^۴} لوک \frac{لا^۲ + لا + ۱}{لا^۴ + لا^۳} \quad (۳۷)$$

$$+ \frac{۱}{لا^۲} مسن \frac{لا^۲ + ۱}{لا^۴ + لا^۳}$$

امثل ۳

(غیر متعلق تفاعل)

$$\int \frac{لا^۲ + لا + ۱}{لا^۴ + لا^۳} فرلا = \frac{۲}{۵} (لا + ۱) - \frac{۲}{۳} (لا + ۱) \quad (۱)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۴ + لا^۳} = \frac{۲}{۳(لا - ۱)} \left\{ (لا + ۱) - \frac{۲}{۳} (لا + ۱) \right\} \quad (۲)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۴ + لا^۳} = \frac{۲}{لا - ۱} لوک (لا - ۱) \quad (۳)$$

- (۴) $\int \frac{فرلا}{(لا-۱)لا} = \frac{لوک}{\frac{لا+۱}{لا-۱}}$
- (۵) $\int \frac{فرلا}{(لا-۱)لا+۱} = \frac{۲-مسترا}{\frac{لا+۱}{۲}}$
- (۶) $\int \frac{فرلا}{(لا+۱)لا-۱} = \frac{۲-مسترا}{\frac{لا-۱}{۲}}$
- (۷) $\int \frac{فرلا}{لا+لا-۱} = \frac{لوک(لا+لا-۱)-\frac{۲}{۳}مسترا}{\frac{۱+لا-لا}{۳}}$
- (۸) $\int \frac{لا}{لا-۱} = \frac{فرلا}{لا-۱} = ۲-لوک + \frac{لا-۱}{لا+۱}$
- (۹) $\int \frac{فرلا}{لا+لا} = \frac{لوک}{\frac{لا+لا-۱}{لا+لا+۱}}$
- (۱۰) $\int \frac{فرلا}{لا+لا+۱} = \frac{فرلا}{لا} - \frac{لا+۱}{لا} - \frac{۱}{۲} لوک \frac{لا+لا-۱}{لا+لا+۱}$
- (۱۱) $\int \frac{لا^۲ فرلا}{لا+لا+۱} = \frac{۱}{۲} لا \frac{لا+لا+۱}{لا} - \frac{۱}{۲} جبتر لا$
- (۱۲) $\int \frac{لا^۲ فرلا}{(لا+۱)لا} = \frac{لا}{لا+لا} + جبتر لا$
- (۱۳) $\int \frac{فرلا}{(لا+۱)لا-۱} = \frac{۱}{۲} مسترا \frac{لا}{لا-۱}$
- (۱۴) $\int \frac{فرلا}{(لا-۱)لا+۱} = \frac{۱}{۲} لوک \frac{لا+لا+۱}{لا-۱} - \frac{لا+لا+۱}{لا}$



ساتواں باب

محدود تکملے

۲۰۱

۸۷۔ تمہید۔ رقبوں کا سوال۔ تکمل کے سوال کا جو مفہوم اب ہم بیان کر چکے اس کے لحاظ سے یہ سوال بہت قدیم ہے لیکن اس کے حل کا عام طریقہ حال میں ہی نیوٹن اور لیب نیز کے وقت میں حاصل ہوا۔ اس دفعہ اور انکی دفعہ میں اس طریقہ کو منطقی تفصیلات میں جانے کے بغیر مختصر طور پر بیان کیا جائیگا اور یہ مان لیا جائیگا کہ ”رقبوں کا سوال“ کافی طور پر اس طریقہ کی تشہیلی ندرت ہے۔ اس طرح اصل اصول آسانی سے سمجھ میں آجائیگا۔ اسکے بعد دفعات ۸۹ تا ۹۴ میں اس سوال پر نئے سرے سے زیادہ عام اور دقیق نقطہ نظر سے بحث کی جائے گی۔

فرض کرو کہ وہ رقبہ دریافت کرنا مطلوب ہے جو سلسلہ منحنی

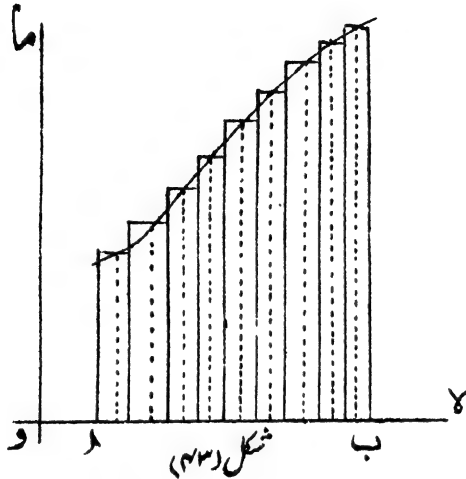
ما = فما (لا) (۱)

محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا ہے یقین کی خاطر یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ ما، لا کی سمت زیر بحث میں مثبت ہے اور

ب < ا۔ اس سمت ب۔ ا کو ہم ذیلی حصوں ہ، ہ، ہ، ہ

☆ اس دفعہ اور انکی دفعہ میں لفظ ”رقبہ“ کو عام و جدانی یا عقلی مفہوم کے مطابق لیا جائے گا جدید نقطہ نظر سے رقبہ کی نئی تعریف ضروری ہے۔ دیکھو دفعہ ۹۹۔

میں تقسیم کرتے اور ان کو قاعدے مان کر مستطیلوں کا ایک سلسلہ بناتے ہیں جن کے ارتفاع ترتیب وار $ما'، ما'، ما'، ...$ مان منحنی کے ایسے معین ہیں



۲۰۲۔ جنہیں مختلف قاعدوں کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے منحنی تک کھینچا گیا ہے۔ اس طور پر جو مستطیل بنائے جائیں ان کے رقبوں کا مجموعہ رقبہ مطلوبہ کا ایک تقرب ہو گا۔ ممکن ہے کہ یہ تقرب رقبہ کو صحیح طور پر تعبیر کرے لیکن یہ ظاہر ہے کہ ذیلی حصوں $ہا'، ہا'، ہا'، ...$ ہن کو جتنا چھوٹا لیا جائیگا یعنی تقسیم کے حصوں کی متناظر تعداد جب قدر زیادہ ہوگی اتنا ہی یہ تقرب بہتر ہوگا۔ ان مستطیلوں کے مجموعہ کی انتہا جبکہ حصوں کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے مطلوبہ رقبہ ہو گا۔

احصا کی ایجاد سے پہلے اسی طرح کا عمل یا اسکے مرادف کوئی اور عمل ہر منحنی کے لئے بشرط امکان الگ طور پر کیا جاتا تھا، اکثر اوقات یہ طریقے نہایت فہیم اور خوش فکر ہو کرتے تھے۔ ذیل کی مثالیں بطور توضیح کے دی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ جو رقبہ مکانی $ما = لا'$ ، محور $لا$ اور معینوں $لا = لا'$ کے

درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔



رکھو $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$ تو

$$h_1 = h_2 = \dots = h_n = h \quad \text{.....} \quad h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$$

ہمیں ذیل کے مجموعہ پر غور کرنا ہے

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = h \{ 1 + (1-n) + \dots + (1-n) \}$$

$$= h \{ 1 + (1-n) + \dots + (1-n) \}$$

$$= h \{ 1 + (1-n) + \dots + (1-n) \}$$

$$= h \{ 1 + (1-n) + \dots + (1-n) \}$$

جب 'n' مال بلا تباہی ہوتا ہے تو اسکی انتہائی قیمت ہوتی ہے

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = h \{ 1 + (1-n) + \dots + (1-n) \}$$

مثال ۲۔ منحنی کی عام صورت $y = a^x$ (۴) جہاں 'a' کی کوئی
صحیح یا کمزور قیمت، مثبت یا منفی سوائے ۱ کے ہو اس طور پر بحث میں آسکتی ہے۔
سخت (ب-۱) کے نقاط تقسیم کے فضلوں کو حسابی سلسلہ میں لینے کی بجائے
جیسے عام طور پر لیا جاتا ہے ہندسی سلسلہ میں تقسیم کرتے ہیں، اس طرح فصلے یہ ہوتے ہیں
 h_1, h_2, \dots, h_n جہاں $h = \frac{1}{n}$

ذیل کے مجموعہ کی انتہا پر غور کرنا ہوگا

$$\Sigma = \{ \text{جب } (ع + \frac{3}{2}) + \text{جب } (ع + \frac{3}{2}) + \dots + \text{جب } (ب - \frac{3}{2}) \}$$

۲۰۲ جہاں ہر وقفہ کے وسط پر جب لاکھ قیمتیں لگی گئی ہیں۔ اب

$$\frac{\text{جب } \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \Sigma = 2 \text{ جب } \frac{3}{2} \text{ جب } (ع + \frac{3}{2}) + 2 \text{ جب } \frac{3}{2} \text{ جب } (ع + \frac{3}{2})$$

$$+ \dots + 2 \text{ جب } \frac{3}{2} \text{ جب } (ب - \frac{3}{2}) + \dots + \text{جم } ع - \text{جم } (ع + \frac{3}{2}) + \text{جم } (ع + \frac{3}{2}) - \text{جم } (ع + \frac{3}{2})$$

$$\text{جم } (ب - \frac{3}{2}) - \text{جم } (ب - \frac{3}{2})$$

$$+ \text{جم } (ب - \frac{3}{2}) - \text{جم } (ب - \frac{3}{2})$$

$$= \text{جم } ع - \text{جم } (ب - \frac{3}{2}) \dots \dots \dots (۱۳)$$

اس لئے انتہا کی طرف گزرتے سے (ع ← ۰) مطلوبہ رتبہ ہے

$$\text{جم } ع - \text{جم } (ب - \frac{3}{2}) \dots \dots \dots (۱۴)$$

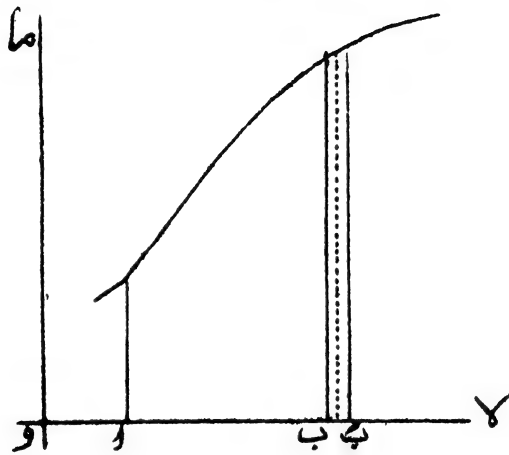
۸۸۔ مقلوب تفرق کے ساتھ تعلق۔ اوپر کی طرح کے حسابات

تکمیلی احصائے فاعدہ کی مدد سے عمل میں لائے جاتے ہیں، اسکی طرف اب ہم متوجہ ہوتے ہیں۔ اگر ا کو ثابت رکھا جائے اور ب کو بدلا جائے تو دفعہ ۸ کا رقبہ ب کا تقابل ہے اور یہ تقابل صفر ہوتا ہے جبکہ ب = ۰۔ اگر ب کو صفاری اضافہ مف ب دیا جائے تو رقبہ کا اضافہ آخر الامر ایک مستطیل سے رقبہ کے مساوی ہوگا جس کا عرض مف ب اور ارتفاع فہ (ب) ہے (دیکھو دفعہ ۴۵) پس اگر رقبہ زیر بحث قی ہو تو

$$\text{مف ق} = \text{فہ (ب) مف ب} \dots \dots \dots (۱)$$

یا

$$\text{فرق} = \frac{\text{فہ (ب)}}{\text{فہ (ا)}} \dots \dots \dots (۲)$$



شکل ۴۵

اگر پہ (لا) ایک ایسا متغیر ہو کہ پہ (لا) = فہ (لا) یعنی پہ (لا) فہ (لا) کا "نامحدود شکل" ہو تو

$$\text{فرق} = \frac{\text{پہ (ب)}}{\text{پہ (ا)}} \dots \dots \dots (۳)$$

دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ق} = \text{پہ (ب)} + م \dots \dots \dots (۴)$$

جہاں م مستقل ہے اور چونکہ ق صفر ہوتا ہے ب = ۰ کے لئے اسلئے

لازماً ہونا چاہئے م = - پہ (ا) پس ق = پہ (ب) - پہ (ا) ... (۵)

گویا رقبہ معلوم کرنے کا سوال اس طرح نامحدود شکل کے سوال میں بدل گیا جس پر

گزشتہ باب میں بحث کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ اگر فہ (لا) = لا تو پہ (لا) = $\frac{۱+۳}{۱+۳}$ اور

$$Q = \frac{1 + P^2 - 1 + P^2}{1 + P^2}$$

سوائے اس صورت کے جبکہ $m = 1$ ۔

اگر $\frac{1}{n} = (لا)$ تو پہ $(لا) = لوک (لا اور ق) = لوک ب$ (۴)

مثال ۲۔ اگر فدا (لا) یجب لا تو یہاں (لا) = جم لا

اور قیاس: $\text{جہم بہا} - (\text{جہم صا}) = \text{جہم صا} - \text{جہم بہا} \dots\dots\dots (۸)$
 یہ نتائج ان کے مطابق ہیں جو دفعہ ۸ میں بڑی محنت اور طول عمل کے ساتھ حاصل ہوئے۔

۸۹۔ تنکلمہ کی عام تعریف۔ ترقیم۔ چھوٹی یا صغاری مقداروں کے

ایک سلسلہ کی اتمہائی قیمت دریافت کرنے کا عمل ایسا ہے جس کے علم ہند اور علم حیل میں بیشمار استعمال اور اطلاق ہیں۔ اب ہم اس پر باضابطہ طور پر بحث کریں گے اور ساتھ ہی ان امور کی طرف توجہ کریں گے جو محض نظری اہمیت رکھتے ہیں اور جن سے اب تک قطع نظر کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ ما = فہم (لا)، لا کا تفاعل ہے اور اسکو ہم معلوم (اور اسلئے مجہول) فرض کرتے ہیں اور سے ب تک (بشمول طیفین) لا کی تمام قیمتوں کے لئے۔ فرض کرو کہ سمت ب۔ اور کو دفعوں

کی کسی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے، ان سب دقتوں کی ایک ہی علامت ہے (۱)۔

(۲)..... ۱-ب = $\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$

۴۰۶ فرض کرو کہ یا کی ایک قیمت ۱۰ ہے جو ۱۰ وقفہ ۱۰ میں اختیار کرتا ہے
اور ۱۰ ایک قیمت ۱۰ ہے جو یہ وقفہ ۱۰ میں اختیار کرتا ہے، علیٰ ہذا القیاس
اور فرض کرو کہ

$$(3) \dots\dots\dots \frac{1}{n} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 3$$

اس حاصل جمع کی قیمت عام طور پر ایک توسعت ب۔ ا کے طریقہ تقسیم کے ساتھ بدلیگی اور دوسرے ان مختلف وقفوں (۱) کے اندر قیمتوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و'، 'ز' کے انتخاب پر۔ لیکن اگر یہ شرط عائد کر دی جائے

کہ ان میں سے کوئی وقفہ بھی ایک مقررہ مقدار گ سے تجاوز نہیں کر سکتا تو بعض صورتوں میں ہم دیکھنے آ اور ان صورتوں میں اکثر ایسے تفاعلوں کے نمونے شامل ہونگے جن سے احصا کے استعمال کی ضمن میں واسطہ پڑنا ہے اور گئی اور ا کہ ج کی قیمت گ کے کم ہونے کے ساتھ ایک عین انتہائی قیمت سے اس کی طرف اس طور پر مال ہوتی ہے کہ گ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس امر کا یقین ہو سکتا ہے کہ ج کا تفاوت سے، کسی چھوٹی سے چھوٹی مقررہ مقدار کی نسبت کم ہوگا۔

جس مجموعہ کو ج سے تعبیر کیا گیا ہے اسے زیادہ تفصیل سے یوں بیان کر سکتے ہیں

ج ب و امف لا یا ج ب ف د (لا) م ف د (۳)

جہاں م ف د کو لا کے اضافوں 'ه'، 'و'، 'ز'، 'ح'، 'ط' کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔ جب اضافے م ف د تمام لا انتہا چھوٹے ہوتے ہیں اور اس لئے انکی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے تو اس انتہائی قیمت کو (جیکہ اسکا وجود ہو) جسکی طرف یہ مجموعہ مستحق ہوتا ہے حدود ا اور ب کے درمیان ف د (لا) کا "محدود تکملہ" کہتے ہیں اسے ہم

ف د م ف د یا ف د (لا) ف د (۵) $\int_a^b y dx$

سے تعبیر کریں گے اس سے ترقیم کو اختیار کرنے سے مل کی وہ منہ لیں جن سے

انتہائی قیمت حاصل کی گئی تھی بیش نظر رہتی ہیں⁺۔

ایسے سوالات جن میں (۳) جیسے مجموعہ کی انتہائی قیمت مطلوب ہوتی ہے علم ریاضی کی تقریباً ہر شاخ میں پائے جاتے ہیں۔ بمعنی کے رقبہ پر پہلے بحث کی گئی ہے۔ اور دیگر سادہ مثالیں یہ ہیں۔ قوس کا طول جسے اندر فنی (یا بیرونی) کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا خیال کیا جائے، گردش جسم کا حجم وغیرہ۔ انھوں باب میں ان پر خاص طور پر بحث کی جائے گی۔

حرکیات میں متغیر قوت کے دھکے (Impulse) کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ یہ وقت کے کسی وقفہ میں قوت کا "زمانی تکملہ" ہے یعنی اگر قوت Q کا تفاعل خیال کیا جائے تو دھکے وقفہ t ۔ تب میں ذیل کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے

$$Q_1 t_1 + Q_2 t_2 + \dots + Q_n t_n \dots (۶)$$

جہاں t_1, t_2, \dots, t_n وقفہ t کے ذیلی حصے ہیں اس طور پر کہ

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = t \dots (۷)$$

اور Q_1, Q_2, \dots, Q_n ان وقفوں میں قوت کی قیمتیں ہیں۔ پس ہماری موجودہ ترسیم کے لحاظ سے دھکے ہے

$$Q \cdot t \dots (۸)$$

نوٹ:۔ تکملہ کی میں علامت \int حرف s کی خاص صورت ہے اسکو پہلے ریاضی دانوں نے (Summation) حاصل جمع کی علامت کے لئے اختیار کیا۔ تکمل کی صحت کو اس طور پر ظاہر کرنے کا طریقہ فوریں کی ایجاد ہے۔

\int فہ (لا) فرلا میں علامت \int مجموعہ کا میسم (م) سمجھا جاسکتا ہے (مجموعہ)

نیوٹن کے دوسرے قانون حرکت کے مطابق کسی کمیت (گ) کے معیار کی تبدیلی اس دھکے کے مساوی ہوتی ہے جو اسے لگتا ہے یا

گ و - گ و = \int^t ق فرت (۹)

جہاں و، و، ابتدائی اور انتہائی رفتاریں ہیں۔
نیز تغیر قوت کا کام قوت کا مکانی تکملہ ہے۔ اگر قوت ق، جسم کے مقام (س) کا تفاعل ہو تو س جیسے س سے س تک بلتا ہے کام جو کیا گیا ہے وہ ہے

\int^s ق فرس (۱۰)

مثلاً گیس کی اکائی کمیت جب حجم ج سے ج تک پھیلتی ہے تو جو کام ہوتا ہوگا

\int^J د فرج (۱۱)

ہے اگر حجم ج کے وقت دباؤ د ہو۔ اسے ہم دیکھ سکتے ہیں اگر گیس کو اکائی رقبہ کی تراش کے اسطوانہ میں، فشارہ کے ذریعہ بند کیا ہوا فرض کیا جائے تکملہ (۱۰) یا (۱۱) کی برسیی تعبیر اکثر اوقات عملیات میں استعمال کیجاتی ہے مثلاً (۱۰) کی صورت میں اگر ایک بخمی بنایا جائے جس میں س منضد ہو اور ق معین نو کام اس رقبہ سے تعبیر ہوگا جو بخمی، س کے محور اور س اور س کے متناظر معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یہ واٹ کی نامزدہ نقضیر کا اصول ہے۔

۹۰۔ استدقاق کا ثبوت - جب مجموعہ ج کی ایک

معین انتہائی قیمت ہو جیسا اور بیان ہوا تو فدا (لا) کو قابل تکمل کہا جاتا ہے۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ہر مسلسل تفاعل اس مفہوم کے مطابق قابل تکمل ہے لیکن باضابطہ ثبوت کے مد نظر ہم اپنی توجہ صرف اس خاص صورت تک محدود رکھینگے جس میں تغیر متبوع کی سمیت محدود تعداد کے ایسے وقوعوں میں تقسیم ہو سکتی ہے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ عملی نقطہ نظر سے یہ کافی ہوگا۔ (محدود ہونے کی قید کے علاوہ) کوئی اور قید عائد کرنے سے پہلے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ دو ثابت حدود مقرر کئے جاسکتے ہیں جن کے درمیان جی لازماً واقع ہوتا ہے۔ اگر وقفہ (ب-ا) کے اندر تفاعل فدا (لا) کی قیمتوں کی نیچلی اور اوپر کی حدود (دفعہ ۱) لہا اور مہا ہوں تو ظاہر ہے کہ جی ذیل کے جملوں کے درمیان واقع ہوگا۔

$$لہ (ہم + ہم + + ہج) = لہ (ب-ا)$$

اور مہا (ہم + ہم + + ہج) = مہا (ب-ا)
تخصیص کی خاطر اب ہم مان لیتے ہیں کہ ب < ا اور فدا (لا) استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے جسے 'لا' سے ب تک بڑھتا ہے۔
وقفہ (ب-ا) کی تقسیم کے کسی خاص طریقہ

$$ہا، 'ہم'،، ہج \dots \dots \dots (۱)$$

پر غور کرو اور فرض کرو کہ

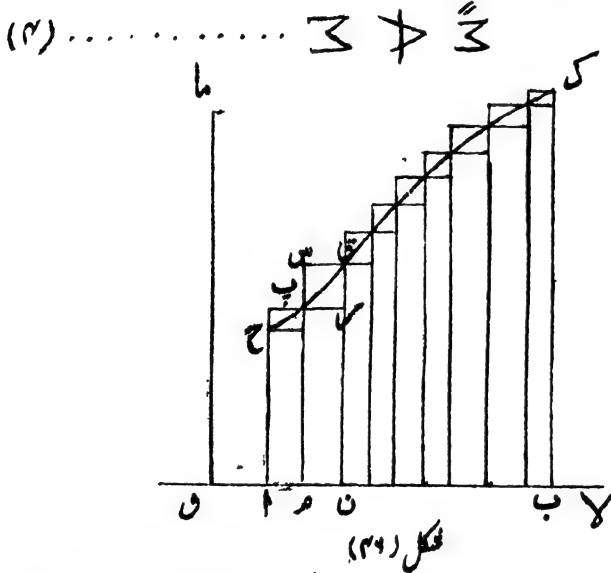
$$ج = ماہم + ماہم + + ماہج \dots \dots \dots (۲)$$

+ اس کے معنی ہیں کہ تکملہ کے لئے ریاضی مقابلہ حاصل ہو سکتا ہے۔

جہاں دفعہ ۸۹ کے مطابق مار کوئی قیمت ہے جو تفاعل وقفہ ہر میں اختیار کرتا ہے۔

اب (۲) میں مار، مار، مار، مار کی بجائے تفاعل کی قیمتیں رکھو جو ان وقفوں کے شروع میں ہیں، اس طرح کوئی رقم نہیں بڑھے گی۔ اگر محصل مجموعہ کو \sum سے تعبیر کیا جائے تو

اس کے بعد اگر مار، مار، مار، مار کی بجائے تفاعل کی قیمتیں درج کی جائیں جو بالترتیب ان وقفوں کے آخر سرور پر ہیں تو کوئی رقم کم نہیں ہوگی۔ اس لئے محصل مجموعہ \sum ہو تو



شکل ۲۹ میں مقدار \sum ایسی مستطیلوں کے سلسلہ کا مجموعہ ہے جیسے پ ن اور \sum ایسی مستطیلوں کا مجموعہ جیسے س ن۔ اس لئے فرق \sum ۔ \sum ایسی مستطیلوں کے مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے جسے س س۔ موزر الذکر مستطیلوں کے ارتفاعوں کا مجموعہ ک پ۔ \sum ایسا فہما (ب)۔ فہ (ا) ہے، اگر ک بڑے سے بڑا قاعدہ ہو یا وقفوں (۱۱)

میں سے بڑے سے بڑا وقفہ ہو تو

3-3-3 گ [فدا (ب) - فدا (ا)] (۵)
 اب سعت (ب - ا) کی تقسیم کے تمام ممکن طریقوں پر غور کرنے سے ہم
 دیکھتے ہیں کہ مجموعات 3-3-3 کی جو ہمیشہ (ب - ا) سے کم رہتے ہیں اور
 ایک انتہا ہوگی۔ اسے (ب - ا) سے تعبیر کرو اور مجموعات 3-3-3 کی جو ہمیشہ (ب - ا)
 سے بڑے رہتے ہیں ایک کچلی انتہا ہوگی جسے (ب - ا) سے تعبیر کرو۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ
 (ب - ا) سے حاصل ہوتا ہے کہ فرق (ب - ا) کو لازماً
 صفر اور گ {فدا (ب) - فدا (ا)} کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔
 اس بیان میں گ اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اس لئے ظاہر ہے کہ
 (ب - ا) اور (ب - ا) مساوی ہوئے بغیر نہیں رہ سکتے۔ ان کی مشترک قیمت کو
 ہم (ب - ا) سے تعبیر کریں گے۔
 آخر لامر یہ ظاہر ہے کہ

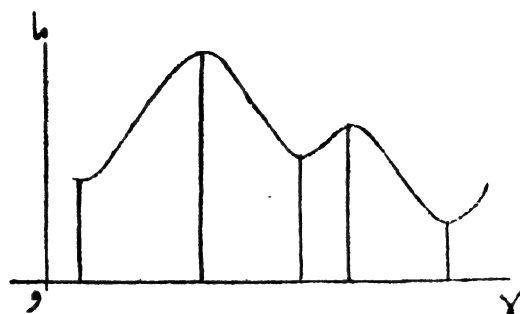
3-3-3 گ {فدا (ب) - فدا (ا)}

اس لئے گ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم اس امر کا پورا اطمینان کر سکتے
 ہیں کہ 3-3-3 گ کسی مقررہ مقدار سے کم ہوگا خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔
 اسی طرح کا ثبوت درست ہوگا اگر تفاعل فدا (ا) سعت (ب - ا)
 میں استقلال کے ساتھ لکھیں گے۔

اس لئے حاصل ہوتا ہے کہ آخری نتیجہ درست رہے گا اگر سعت کو اسے
 چھوٹے وقفوں کی محدود تعداد میں توڑا جائے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل
 یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ دیکھو شکل ۴

※ نیوٹن نے Principia, lib 1; Sec. 1 lemma iii. (1687)

میں جو ثبوت دیا ہے یہ ثبوت اس کی توسیع ہے۔ تمام ہندسی تخیلات کو محال کر
 استدلال کو محض تحلیلی شکل میں پیش کرنا آسان ہوگا۔



(۲۰) شکل

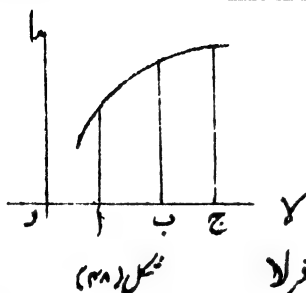
۳۱۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ $b < 1$ ۔ اگر $b > 1$ تو وقفے
 ہ، ہ، ہن منفی ہونگے مگر استدلال میں اصولاً کوئی فرق نہیں آئے گا۔
 ۹۱۔ f^b (لا) فرلا کی خاصیتیں۔

(۱) اگر تکملوں f^b (لا) فرلا اور f^b (لا) فرلا
 کا باہم مقابلہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ دونوں تکملے ایک ہی مجموعہ کی انتہا
 خیال کئے جاسکتے ہیں، صرف اتنا فرق ہے کہ ایک صورت میں
 لا کے اضافے ہ، ہ، ہن جن سے ملکر وقفہ $b-1$
 یا (۱- b) بنتا ہے دوسری صورت کے اضافوں کے لحاظ سے
 تیزاد عالمت رہتے ہیں۔

اسلئے f^b (لا) فرلا = f^b (لا) فرلا (۱)

(۲) نیز تعریف سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

f^b (لا) فرلا = f^b (لا) فرلا + f^b (لا) فرلا (۲)

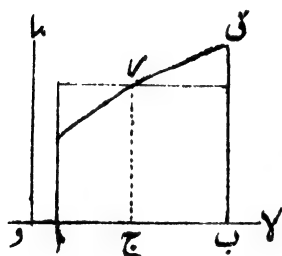


شکل ۳۸ سے اسکی تریسی توضیح ہوتی ہے
(۳) اگر فدا (لا) کی کم سے کم اور بڑی سے
بڑی قیمتیں لہ اور مہا ہوں جیسے
لا، د سے ب تک گزرتا ہے تو ہیکل

فدا (لا) فرلا

قیمتوں لہ (ب-د) اور مہا (ب-د) کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اسلئے لازماً
یہ (ب-د)

کے مساوی ہے جہاں لہ اور مہا کے درمیان مقدار یہ واقع ہے۔
اگر فدا (لا) منسل ہو تو وسعت (ب-د) کے اندر یہ تفاعل وہ تمام
قیمتیں اختیار کرتا ہے جو لہ مہا کے درمیان واقع ہیں۔ اسلئے د اور ب
کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت (ج)



ضرور ایسی ہونی چاہئے کہ فدا (ج) = یہ
شکل ۳۹ کی تریسی تقبیر میں رقبہ
ب (ب-د) ق اس منطیل کے مساوی
جس کا فائدہ (ب) ہے اور اتنا وسعت
(ب) کے ایک نقطہ ج کے معین
کے مساوی ہے۔ صریحاً ہم کہہ سکتے ہیں

شکل (۳۹)

ج = د + طہ (ب-د)

جہاں طہ کوئی مقدار ہے جو اور کے درمیان واقع ہے اس قرار داد کے مطابق

فدا (لا) فرلا = (ب-د) فدا د + طہ (ب-د) کم (۳)

(۴) زیادہ عام طور پر اگر ع و، مائیں ایسے لا کے تفاعل ہوں کہ د سے

ب تک لا کی قیمتوں کے لئے ع < م < و (۴)

تو ہیکل د م فرلا (۵)

مفات = \int فہ (لا) فرلا = مف ب فہ (ب + طہ مف ب) (۳)
 دفعہ ۹۱ (۳) کی رو سے - اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مفات مف ب کے ساتھ معدوم ہوتا ہے یعنی ت ب کا مسلسل تفاعل ہے۔

۲۱۲

نیز چونکہ $\frac{\text{مفات}}{\text{مف ب}} = \text{فہ (ب + طہ مف ب)}$ (۴)
 اتہا مف ب ← لے لے سے

$\frac{\text{فرت}}{\text{فرب}} = \text{فہ (ب)}$ (۵)
 اسی طرح اگر اوپر کی حد ب کو ثابت رکھ کر بجلی حد ا کو بدلا جائے تو ت ا کا مسلسل تفاعل ہوگا اور

$\frac{\text{فرت}}{\text{فرا}} = \text{فہ (ا)}$ (۶)

۹۲۔ نامحدود تکملہ کا وجود - اب ہم دکھا سکتے ہیں کہ کوئی

تفاعل فہ (لا) جسکی نوعیت وہ ہو جو دفعہ ۹۰ میں بیان کی گئی ہے۔ ایک نامحدود تکملہ رکھتا ہے یعنی ایک ایسے قابل تعین (ضروری نہیں کہ یہ محسوب بھی ہو سکے) تفاعل پہ (لا) کا وجود ہے کہ

پہا (لا) = فہا (لا) (۱)

یا پہا (لا) = عفا فہا (لا) (۲)

کیونکہ اگر کہا جائے پہا (ضمہ) = \int فہا (لا) فرلا (۳)

تو بائیں جانب کا جملہ دفعہ ۹۰ کی رو سے، ضمہ کا ایک قابل تعین تفاعل ہے اور اوپر کی تحقیق سے واضح ہے کہ اس شرط کو پورا کرتا ہے

پہا (ضمہ) = فہا (ضمہ) (۴)

موجودہ نقطہ نظر سے (۳) میں تکمل کی پہلی حد اختیار ہی ہے اور اس لئے تفاعل پہ (ضمہ) جمع شدنی مستقل کی حد تک قابل تعین ہے کیونکہ دفعہ ۹۱ (۲) کی رو سے (۳) میں پہلی حد کے طور پر (۱) کی بجائے (۱) درج کرنا گویا بائیں جانب تکملہ

$$\text{م} \quad \text{فہ (لا) فرلا}$$

کا جمع کر دینا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۷۲ کے ساتھ۔

۹۴۔ محدود تکملہ کے محسوب کرنیکا قاعدہ۔

جب کبھی پہ (لا) کی تحلیلی شکل معلوم ہو جس کا پہلا مشتق فہ (لا) ہے تو محدود تکملہ

$$\text{ت} = \text{م} \quad \text{فہ (لا) فرلا} \dots \dots \dots (۱)$$

کی قیمت فوراً لکھی جاسکتی ہے۔ کیونکہ اگر (۱) کو ثابت رکھا جائے تو دفعہ ۹۲ سے ۲۱۳

$$\text{فرت} = \frac{\text{فہ (ب)}}{\text{پہ (ب)}} \dots \dots \dots (۲)$$

بموجب فرض۔ دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ ت اور پہ (ب) صرف "ایک مستقل" کے لحاظ سے متفادت ہو سکتے ہیں یعنی ان میں فرق صرف ایک مستقل مقدار کا ہو سکتا ہے جو ب پر منحصر نہ ہو۔ پس

$$\text{م} \quad \text{فہ (لا) فرلا} = \text{پہ (ب)} + \text{م} \dots \dots \dots (۳)$$

م چونکہ ب پر منحصر نہیں اسلئے م معلوم کرنے کے لئے رکھو ب = (جس سے

$$\text{پہ (۱)} + \text{م} = \text{م} \quad \text{فہ (لا) فرلا} = ۰ \dots \dots \dots (۴)$$

اس لئے م = - پہ (۱) اور

ج فدا (لا) فرلا = پھا (ب) - پھا (ا) (۵)
 متکلی احصا کا یہ بنیادی مسئلہ ہے۔ اس سے کسی معلومہ تفاعل فدا (لا)
 کے محدود مسئلہ کی قیمت دریافت کرنے کا مسئلہ متقلوب تفاعل پھا (لا)
 یا عفا (لا) کے حاصل ہونے پر مبنی ہوتا ہے۔ اب اسکی وجہ
 ظاہر ہے کہ اس متقلوب تفاعل کو اس شکل

ج فدا (لا) فرلا (۶)
 سے کیوں تعبیر کرتے ہیں۔ (۶) صرف ج فدا (لا) فرلا (۷)
 کا اختصار ہے جہاں ا اختیاری ہے۔ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ ا میں کوئی
 تبدیلی محض شغل کو بدل دینے کے مرادف ہے۔

ترقیم [پھا (ب) - پھا (ا)] (۸)
 کو اکثر اوقات اختصار کے طور پر پھا (ب) - پھا (ا) کے لئے استعمال
 کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ ج فدا (لا) فرلا (۹)

یہاں ج فدا (لا) = فو ک لا، پھا (لا) = ج ا فو ک لا

پس ج فو ک لا فرلا = ج ا فو ک ب (فو ک ب - فو ک ا) (۱۰)

مثال ۲۔ ج جب لا فرلا (۱۱)

یہاں ج فدا (لا) = جب لا، پھا (لا) = ج ا - ج ب ۲ لا

پس $\frac{1}{n}$ جب لا فلا $= \frac{1}{n}$ (۱۲)

۹۵۔ صہویرین تفاعل فم (لا) یا مکمل کے دو لا متناہی ہو جائیں۔

اور مثالوں پر غور کرنے سے پیشتر دفعہ ۹۴ کے مکمل کی تعریف کو ذرا وسیع کرنا مناسب ہو گا۔ وہاں یہ مان لیا گیا تھا کہ مکمل کے محدود کو 'ب' محدود میں اور تفاعل فم (لا) تمام وسعت ب۔ ا میں محدود ہے۔ اب ہم دیکھینگے کہ بعض حالات میں ان شرائط کو ذرا دھینکا کر دینا کیسے ممکن ہے۔ (آ) فرض کر دو کہ فم (لا) (لا) کی تمام محدود قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہے۔

تکملہ $\frac{1}{n}$ فم (لا) (۱)

پر غور کرو جہاں صہ $\frac{1}{n}$ ۔ اگر صہ کو لا انتہا بنانے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس انتہائی قیمت کو تکملہ

$\frac{1}{n}$ فم (لا) فلا (۲)

سے تعبیر کرتے ہیں اور تکملہ (۱) کو صہ $\frac{1}{n}$ کے لئے "استدق" کہا جاتا ہے۔ جیسا کہ لا متناہی سلسلوں کے نظریہ سے یہ توقع کی جا سکتی ہے (دفعہ ۵) استدقاق کے لئے یہ کافی شرط نہیں ہے کہ

نہا $\frac{1}{n}$ فم (لا) = (۳)

نیز یہ شرط ضروری بھی نہیں ہے کیونکہ استدقاق اس صورت میں بھی ممکن ہو سکتا ہے جبکہ لا $\frac{1}{n}$ کے لئے فم (لا) کی کوئی معین انتہائی قیمت نہ ہو۔

اسی طرح کی تعریف $\frac{1}{n}$ فم (لا) فلا (۴)

کے لئے بھی مرتب ہو سکتی ہے۔

(۲) فرض کرو کہ فہ (لا) لا متناہی ہو جاتا ہے تکمیل کے حدود پر یا ان کے

درمیان۔ صرف اُس صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جہاں لا کی صرف ایک قیمت ہو جس کے لئے فہ (لا) ∞ ۔ عام صورت اس صورت میں تحویل ہو سکتی ہے اگر سرعت ب۔ ا کو چھوٹے وقفوں میں توڑ دیا جائے۔

اگر فہ (لا) (صرف) اوپر کی حد پر لا متناہی ہوتا ہو تو ہم سب سے پہلے تکملہ

ب۔ صہ
فہ (لا) فرلا (۵)

پر غور کرتے ہیں جہاں صہ مثبت ہے۔ اگر صہ کو لا متناہی کم کرنے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس قیمت کو ہم تکملہ

ب۔ صہ (لا) فرلا کی تعریف قرار دیتے ہیں۔

اسی طرح کی تعریف اُس صورت پر حاوی ہوگی جہاں فہ (لا) بجلی حد لا پر لا متناہی ہوتا ہے۔

اگر فہ (لا) حدود ا، ب کے درمیان لا متناہی ہوتا ہو مثلاً
لا = ج کے لئے تو ہم اس مجموعہ پر غور کرتے ہیں

ج۔ صہ
فہ (لا) فرلا + فہ (لا) فرلا (۶)

اگر صہ (اور صہ) کے کم کرنے سے ان میں سے ہر ایک تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو ان قیمتوں کے مجموعہ کو تکملہ

ب۔ صہ ان بیا جاتا ہے کہ فہ (لا) اکیلے نقطوں کی محدود تعداد پر صی لا متناہی ہوتا ہے۔

$$+ \quad \text{فد (لا) فرلا} \dots \dots \dots (۷)$$

کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔

جب 'فد (لا) تنہا نقطوں کی محدود تعداد پر لامتناہی یا غیر مسلسل ہوتو ایسی صورتوں کا استعمال ہون ہو سکتا ہے کہ سمیت کو ایسے چھوٹے وقفوں میں تقسیم کیا جائے جن کا نقاط غیر مسلسل احاطہ کر لیں۔

$$\text{مثال ۱۔} \quad \text{فد (لا) فرلا} = \left[\frac{1}{\text{فد}} - \frac{1}{\text{فد}} \right] = \frac{1}{\text{فد}} - \frac{1}{\text{فد}} \dots (۸)$$

یہ سہ بڑھتا ہے یہ جلد انتہا $\frac{1}{\text{فد}}$ کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس لئے

$$\text{فد (لا) فرلا} = \frac{1}{\text{فد}} \dots \dots \dots (۹)$$

$$\text{مثال ۲۔} \quad \text{فد (لا) فرلا} = \left[\text{لوک (لا) لوک} \right] = \text{لوک (لا) لوک} \dots \dots (۱۰)$$

یہ سہ کے ساتھ لامتناہی بڑھتا ہے۔ اس لئے سہ ∞ کے لئے کوئی انتہائی

$$\text{نہا} = \frac{1}{\text{لا}} = \infty \dots \dots \dots (۱۱)$$

+ ایسی صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں جہاں ذیل کا ہر ایک تکملہ

$$\text{فد (لا) فرلا} \quad \text{اور} \quad \text{فد (لا) فرلا} \quad \text{ج۔ صہ}$$

آخر لامتناہی ہو لیکن اگر کوئی خاص متناہی صفر ہونے والی تعدادوں صہ، صہ پر عالم کیا جائے تو ان دو تکملوں کے لامتناہی جزو اس طور پر ایک دوسرے کو ذرا سج کر سکتے ہیں کہ مجموعہ محدود رہے۔ رشتہ مذکورہ اگر سہ = سہ ہو تو نتیجہ محدود کہ واجب

اسکا وجود ہو کوشتی (Cauchy) کے تکملہ (۷) کی "صدری قیمت" کہلاتے۔

مثال ۲۔ دفعہ ۱ کی رو سے

$$\frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} = \frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} \quad \text{فوق}$$

$$\frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} = \frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} \quad \text{فوق}$$

۲۱۷ اگر حد مثبت ہو تو جیسے سہ لائٹنا ہی کی طرف مائل ہوتا ہے آخری رقم اپنی انتہائی قیمت سفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ اس لئے

$$\frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} = \frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} \quad \text{فوق} \quad (۴)$$

$$\frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} = \frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} \quad \text{فوق} \quad (۵)$$

مثال ۳۔

$$\frac{\text{سن الا}}{\text{سن الا}} = \frac{\text{سن الا}}{\text{سن الا}} = \frac{\text{سن الا}}{\text{سن الا}} \quad \text{سن الا}$$

تفاعل سن الا کثیر القیمت تفاعل سن الا (دفعہ ۱۲) لیکن یہ چنداں بہت نہیں کہتا کہ کوئی قیمت لی جائے بشرطیکہ ہم یہ فرض کر لیں کہ یہ یکساں طور پر بدلتا ہے جیسے لا تکمیل کی سمت میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے اگر لیا جائے سن الا = ۰۔ تو سن الا سے وہ قیمت مراد ہوگی جو یکساں طور پر۔ سے سہ تک بڑھتی ہے۔ جب سہ لا انتہا بڑھتا ہے تو یہ قیمت انتہا ۲ کی طرف مائل ہوتی ہے

$$\frac{\text{سن الا}}{\text{سن الا}} = \frac{\text{سن الا}}{\text{سن الا}} = \frac{\text{سن الا}}{\text{سن الا}} \quad \text{سن الا} \quad (۶)$$

مثال ۴۔ دفعہ ۸ کی رو سے

$$\frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} = \frac{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا} + \text{جم بدلا}}{\text{عاجب بدلا} + \text{بدلا}} \quad \text{فوق}$$

اب جیسے طہا سے ۲ تک بڑھتا ہے، مس طہا سفر سے ۰ تک

بڑھتا ہے اور اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مس^۱ [ع^۲ / ب^۲] مس ط^۲ [ص^۲ / پ^۲]
تک بڑھتا ہے۔

اس لئے $\frac{\text{ع^۲ جب ط^۲ + ب^۲ جم ط^۲}}{\text{ع^۲ ب^۲}} = \frac{\text{پ^۲}}{\text{ص^۲}} \dots (۷)$
طالب علم نے گذشتہ باب کی ضمن میں دیکھا ہوگا کہ جب متغیر کے بدلنے سے نا محدود تکمیل عمل میں لایا جاتا ہے (دفعات ۷، ۹) تو عمل کا نہایت تکلیف دہ حصہ وہ ہوتا ہے جس میں ابتدائی متغیر کی طرف عود کیا جاتا ہے۔ جب معلومہ حدود کے درمیان محدود تکمیل دریافت کرنا مقصود ہو تو عمل کا یہ حصہ غیر ضروری ہوتا ہے اور نا محدود تکمیل حاصل کر کے اس میں نئے حدود درج کر دینا کافی ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ $\frac{\text{لا}^۲ - \text{لا}^۱}{\text{لا}^۲}$ فرلا کو معلوم کرو۔

دفعہ ۷ میں لا = ا جب ط^۲ رکھنے سے ماہل ہوا

$\frac{\text{لا}^۲ - \text{لا}^۱}{\text{لا}^۲} = \frac{\text{لا}^۱ \text{ جم ط^۲ فرط^۲}}{\text{لا}^۲} = \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۱ (\text{ط^۲ + } \frac{۱}{۲} \text{ جب ط^۲})$
اب اگر ط^۲ سے ۲ تک بدلتا تو لا^۱ سے لا تک بدلتا۔ اسلئے
 $\frac{\text{لا}^۲ - \text{لا}^۱}{\text{لا}^۲} = \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۱ (\text{ط^۲ + } \frac{۱}{۲} \text{ جب ط^۲})$

$\frac{۱}{۲} \text{ لا}^۱ \text{ جم ط^۲ فرط^۲}}{\text{لا}^۲} = \dots (۹)$

۹۷۔ تحویلی ضابطے۔ دفعات ۸، ۸۲ کے طریقے جب محدود

تکملوں کی تحویل میں استعمال کئے جاتے ہیں تو تکمیل شدہ رقوم کے دونوں حدود پر صفر ہو جانے سے خاص طور پر سادہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{\text{لا}^۲ - \text{لا}^۱}{\text{لا}^۲} = \text{لا}^۱ \text{ جم ط^۲ فرط^۲}}{\text{لا}^۲} \dots (۱)$

تو دفعہ ۸۲ (۲) کی روت سے

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)^2 \right] + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)^2 \quad (2)$$

اگر \angle تو پہلا حصہ صفر ہو جاتا ہے کیونکہ جب $\theta = 0$ ۔

اس لئے $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (۳)

اسی طرح سے دفعہ ۸۲ (۶) کی رو سے

$\frac{1}{n} = \text{جیب } \phi$ فطما ... (۴)

اگر n مثبت صحیح عدد ہو تو (۳) کے متوازن استعمال سے

۱۰۰ جم طه فرطه

سكو $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$ یا $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$ (۱۵)

کی قوم میں بیان کیا جاسکتا ہے بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت۔

اسی طرح سے \int جب طما فرطما کو

$$\int^{\pi} \text{جب طہ فرطہ} = \text{ایا} \int^{\pi} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{r} \dots\dots\dots (4)$$

پرمصر کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۱- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

$$\frac{1}{15} = \int_{\frac{1}{15}}^{\frac{1}{10}} \frac{1}{x} \times \frac{1}{5} =$$

اس طور پر دو تین مثالیں مل کر نیکے بعد طالب علم تنبیہ کے فتوا تراجم سے غصہ کی کوز بانی

لکھ سکیگا مثلاً

$$\pi \frac{5}{32} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \text{جم } \pi \text{ فرطہ}$$

اوپر کے شکلوں کی عام قیمتیں آسانی سے لگی جاسکتی ہیں۔ مثلاً اگر ن طاق ہو تو

$$\text{جم } \pi \text{ فرطہ} = \text{جم } \pi \text{ فرطہ} = \frac{\pi \times (1-n) \times (3-n) \times 2 \times \dots}{n \times (2-n) \times 3 \times \dots} \dots (7)$$

لیکن اگر ن جفت ہو تو

$$\text{جم } \pi \text{ فرطہ} = \text{جم } \pi \text{ فرطہ} = \frac{\pi \times (1-n) \times (3-n) \times 1 \times \dots}{n \times (2-n) \times 2 \times \dots} \dots (8)$$

اس نمونہ کے تکملے اصصا کے طبعی استعمال میں اکثر واقع ہوتے ہیں۔

(۲) اگر π = جم π فرطہ = جم π فرطہ (۹)

تو دفعہ ۸۲ (۱۰) کی رو سے

$$\pi = \left[\frac{1}{\pi + n} \text{ جم } \pi \text{ فرطہ} \right] + \frac{1-n}{\pi + n} \pi = \dots (10)$$

اگر $n < 1$ تو [] کے اندر کا جملہ دونوں حدود پر بعد م ہوتا ہے۔ اس طرح

$$\text{جم } \pi \text{ فرطہ} = \frac{1-n}{\pi + n} \text{ جم } \pi \text{ فرطہ} = \dots (11)$$

اسی طرح دفعہ ۸۲ (۱۱) سے ماہل ہوتا ہے اگر $m < 1$

$$\text{جم } \pi \text{ فرطہ} = \frac{1-m}{\pi + m} \text{ جم } \pi \text{ فرطہ} = \dots (12)$$

ان مضامین کے ذریعہ کوئی طاقت ناجبجی بقدر ۲ کے کم کیا جاسکتا ہے اور اس عمل کی تکرار سے تکملہ (۹) ایسے تکملہ پر آ کے منحصر ہو سکتا ہے جس میں قوت نا یا بقدر ۲ ہو۔

م مثبت صحیح عدد ہوں۔ آخر الامر ماہل میں ذیل کی کوئی نہ کوئی صورت دیکھیں گی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{جب } \text{فرطہ} = \frac{\pi}{4} \\ \text{جب } \text{طہ} \text{ فرطہ} = 1 \quad , \quad \text{جب } \text{جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = 1 \end{array} \right. \dots (۱۳)$$

مثال ۲۔ $\text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = \frac{\pi}{4}$ $\text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ}$$

(۱۲) کی رو سے - نیز (۱۱) سے

$$\text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = \frac{\pi}{4} \quad \text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4}$$

$$\text{اس لئے } \text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$$

تھوہلی شوق کے بعد جواب فوراً لکھا جاسکیگا۔ مثلاً

$$\text{جب } \text{طہ} \text{ جم } \text{طہ} \text{ فرطہ} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$$

ضابطوں (۱۱) اور (۱۲) نیز (۳) اور (۴) کی علی شقوں میں ضرورت ہوتی ہے۔ ان کو یاد رکھنا مناسب ہے۔

$$\text{نیز جبری مکملہ } \text{لا}^{\text{ا}} (1 - \text{لا})^{\text{ن}} \text{ فرلا} \dots \dots \dots (۱۴)$$

میں رکھو لا = جب طہ تو اس کی یہ صورت ہو جاتی ہے

$$\text{جب } \text{طہ}^{\text{ا}} + \text{طہ}^{\text{ن}} \text{ جم } \text{طہ}^{\text{ا}} + \text{طہ}^{\text{ن}} \text{ فرطہ} \dots \dots \dots (۱۵)$$

اسکی قیمت اوپر کے ضابطوں سے لگی جاسکتی ہے جب کسی $۱ + ۴۲$ اور $۱ + ۲۱$ مثبت صحیح عدد ہوں یا منفی ہوں۔

اسی طرح تکلمہ 'م لا (۱-۲) (لا۱) فرلا (۱۶)۔
میں رکھو لا = جب ظہا تو تکلمہ یہ شکل اختیار کرتا ہے

مثال ۳- $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \int_1^2 x^{-2+1} dx = \int_1^2 x^{-1} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ (۱۷)

$$\frac{14}{15} = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times 1 =$$

مثال ۴ - $\int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

۲۲۱۔ ۹۸۔ مربوط تکمیل۔ محدود تکملوں کے متعلق کئی مسئلے ہیں جو دفعہ ۸۹ کی تعریف سے محض وجدانی طور پر حاصل ہوتے ہیں مثلاً

ف (لا) فرلا = ف (ا-لا) فرلا (۱)
 اس کے ثبوت کے لئے لکھو لا = ا-لا 'فرلا = فرلا تکمیل کے حدود میں
 لا = . لا کے جواب میں لا = ا-لا = . بالترتیب پس
 ف (لا) فرلا = ف (ا-لا) فرلا = ف (ا-لا) فرلا

آخر میں زیر نکال دیا گیا کہ اس کی ضرورت نہیں۔
 اوپر کا عمل مبدا کو نقطہ لا ∞ پر لجا کر محور لا کی سمت کو بدل دینے
 مراد ہے، اس طور پر معلوم ہو گا کہ (۱) سے جو رقبہ تعبیر ہوتے ہیں وہ
 متماثل ہیں۔ شکل یہ ہے
 (۱) کی ضروری شکل یہ ہے

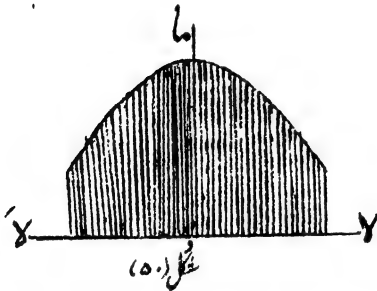
$\int f(x) dx = \int f(x) dx$ (جم طہ) فرطہ (۲)

مثال ۱۔ مثلاً $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ (جم طہ) فرطہ

پس ہر ایک تکملہ $= \frac{1}{n} \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ (جم طہ) فرطہ $= \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

اگر فہ (لا) کا تحت تفاعل ہو یعنی فہ (لا) = فہ (لا) (۳)

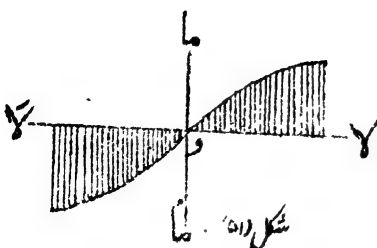
تو $\int f(x) dx = \int f(x) dx$ (لا) فرلا = ۲ $\int f(x) dx$ (لا) فرلا (۴) ۲۲۲



پہلے تکملہ سے جو رقبہ تبسیر
ہوتا ہے سرچکا اس کی نصف
محور صا سے ہوتی ہے۔
برعکس اس کے اگر فہ (لا)
لا کا طاق تفاعل ہو یعنی
فہ (لا) = فہ (لا) (۵)

تو $\int f(x) dx = \int f(x) dx$ (لا) فرلا = (۶)

کیونکہ اس مجموعہ میں سبکی انتہا یہ محو



تکملہ ہے (دفعہ ۸۹)
جزو فہ (لا) مف لا
اور متقابل کی علامت والا جزو
فہ (لا) مف لا
دونوں ملکر ایک دوسرے کے
ساقط کرتے ہیں۔

مثال ۲- $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ج}^{\frac{\pi}{2}} \text{ط}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{فرط}^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ج}^{\frac{\pi}{2}} \text{ط}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{فرط}^{\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{r}{10} = 1 \times \frac{r}{r} \times \frac{1}{0} \times r =$$

اور $\frac{\pi}{2}$ جب α جم α فر α =۔ کیونکہ جب α ط α کے ساتھ

علامت بدلتا ہے۔

ایسے ہی وجوہات کی بنا پر اگر $f(a) - f(b) = f(a) - f(b) \dots \dots \dots (4)$

تو $\int f(x) dx = \int f(x) dx = \int f(x) dx = \dots \dots \dots (8)$

لیکن اگر $f(a) = f(b)$ - فضا (لا) (۹)

تر \int فـ (لا) فرلا = (۱۰)

(۸) کی خاص صورت کے طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\int f(x) dx = \int f(x) dx + \int f(x) dx + \dots + \int f(x) dx \quad (11)$$

کیونکہ جب $(\pi - \mu) = \text{جب } \mu$

۲۲۳ مثال ۳- $\int \text{جبا ط ج م ط ف ر ط} = \frac{1}{2} \int \text{جبا ط ج م ط ف ر ط}$

$$\frac{2}{1} = 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times 1 =$$

اور ۲۲ جب اٹھ جم اٹھ فرطہ۔

امشاد

۱۔ ذمہ شال کے طریقہ سے ثابت کرو کہ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ ۔

- ۵ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^2+1)} = \text{لوک} (لا^2+1) ، \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^2-1)} = \text{لوک} (لا^2+۲)$
- ۶ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+1)(لا)} = \text{لوک} ۲ ، \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲+1)(لا)} = \frac{1}{۲} \text{لوک} ۲$
- ۷ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲-1)(لا+1)} = \frac{\pi^2}{۳۲}$
- ۸ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲+1)(لا+1)} = ۱ - \frac{\pi}{۲}$
- ۹ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲+1)(لا^۲+۲)} = \frac{\pi}{۲(لا+1)}$
- ۱۰ $\int_1^{\infty} \frac{لا^۲ فرلا}{(لا^۲+1)(لا^۲+۲)} = \frac{\pi}{۲(لا+1)}$
- ۱۱ $\int_1^{\infty} \frac{لا فرلا}{(لا^۲+1)(لا^۲+۲)} = \frac{1}{لا+۲} \text{لوک} \frac{1}{ب}$
- ۱۲ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲+1)(لا)} = ۱ - \text{لوک} ۲ ، \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲+1)(لا)} = \text{لوک} ۲ - \frac{1}{۲}$
- ۱۳ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲+1)(لا^۲)} = \frac{\pi}{۴}$
- ۱۴ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲-1)(لا^۲+1)} = \frac{\pi}{۲} ، \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا^۲+1)(لا^۲+1)} = \text{لوک} (لا^۲+1)$
- ۱۵ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا-1)(لا)} = \pi ، \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا-1)(لا)} = \frac{\pi}{۲}$
- ۱۶ $\int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+1)(لا-1)(لا-۲)} = \pi ، \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+1)(لا-1)(لا-۲)} = \pi$

$$۳۰ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۱ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۲ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۳ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۴ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۵ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۶ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۷ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۸ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۳۹ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۴۰ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$۴۱ - \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \int \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{4} - 1$$

۳- ثابت کرد که $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(1-x) dx$ ،

$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx$.

۴- ثابت کرد که $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx$ ،

اور $\int_0^1 [f(x) - f(1-x)] dx = 0$.

۵- اگر $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2}$ ، پس $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0$.

۶- $\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}$ ،

۷- $\int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{4}$ ،

۸- $\int_0^1 (1-x)^4 dx = \frac{1}{5}$ ،

۹- $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ، $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ،

۱۰- $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ، $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ،

۱۱- $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ، $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ،

۱۲- $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ، $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ،

$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{2}$ ،

$$۱۳- \int_1^{\infty} (ا ج ب ط + ب ج م ط + م ط ف ط) = \frac{۱۶}{۱۵} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۹}{۱۵} \quad \text{لا}^۱ \text{ب}^۲ + \text{ا}^۱ \text{ب}^۲$$

$$۱۴- \int_1^{\infty} \frac{\text{جم لا} - \text{جب لا}}{\text{ا} + \text{جب لا} + \text{جم لا}} \text{فرلا} =$$

$$۱۵- \text{ثابت کرد که} \int_1^{\infty} \frac{\text{جم ط ف ط}}{\text{ا} + \text{جم ط} + \text{ب} + \text{ج ب ط}} = \frac{\pi}{۲} \quad \text{ا}^۱ \text{ب}^۲ + \text{ا}^۱ \text{ب}^۲$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{ج ب ط ف ط}}{\text{ا} + \text{جم ط} + \text{ب} + \text{ج ب ط}} = \frac{\pi}{۲} \quad \text{ا}^۱ \text{ب}^۲ + \text{ا}^۱ \text{ب}^۲$$

$$۱۶- \text{ثابت کرد که} \int_1^{\infty} (ا + لا) (ا - لا) \text{فرلا} =$$

$$\int_1^{\infty} \text{ج ب ط}^{۱+۲} \text{جم ط}^{۱+۲} \text{ط ف ط}^{۱+۲} =$$

$$۱۷- \text{ثابت کرد که} \int_1^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(ا + لا)^۲} =$$

$$۱۸- \text{اگر ن شبت صح عدد هو تو ثابت کرد که} \int_1^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(ا + لا)^۲} = \frac{۳ - \pi^۲}{۲ - \pi^۲} \quad \text{اگر ن شبت صح عدد هو تو ثابت کرد که}$$

$$۱۹- \text{اگر ن} < \text{ا تو ثابت کرد که} \int_1^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(ا + لا)^۲} = \frac{(۲ - \pi^۲) \dots \times ۶ \times ۴ \times ۲}{(۱ - \pi^۲) \dots \times ۵ \times ۳ \times ۱}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(ا + لا)^۲} = \frac{\pi}{۱ - \pi^۲} \quad \text{اگر ن} < \text{ا تو ثابت کرد که}$$

$$۲۰- \text{ثابت کرد که} \int_1^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{جم ن ع}} = \frac{\pi}{۱ - \pi^۲} \quad \text{اگر ن} < \text{ا تو ثابت کرد که}$$

[اگر ن جم ن ع = ق ط ط]

۲۱۔ اگر $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$

۲۲۔ اگر $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$

۳۔ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$

امثلہ ۳۳

۱۔ اگر $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$

$$1 - \frac{n}{3 \times 1} + \frac{n(n-1)}{5 \times 2 \times 1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{7 \times 3 \times 2 \times 1} + \dots$$

$$= \frac{n^2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \times 18 \times 20 \times 22 \times 24 \times 26 \times 28 \times 30 \times 32 \times 34 \times 36 \times 38 \times 40 \times 42 \times 44 \times 46 \times 48 \times 50 \times 52 \times 54 \times 56 \times 58 \times 60 \times 62 \times 64 \times 66 \times 68 \times 70 \times 72 \times 74 \times 76 \times 78 \times 80 \times 82 \times 84 \times 86 \times 88 \times 90 \times 92 \times 94 \times 96 \times 98 \times 100}{(1+n)^2} + \dots$$

۲۔ اگر $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$

۳۔ اگر $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$

۴۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2}$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-4} + \dots$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-4} + \dots$$

جو ایک سے کم ہے اور

نہیہ لا^۱ فہ (لا) محدود ہے۔ [رکھو لا = ت^۱]

۱۰۔ اگر فہ (لا) محدود اور مسلسل ہو لا کی تمام قیمتوں کے لئے تو مکملہ

مجموع فہ (لا) فرلا محدود ہوگا بشرطیکہ ایک مقدار م ایسی مل سکتی ہو ایک سے بڑی ہے

اور نہیہ لا^۱ فہ (لا) محدود ہے۔ [رکھو لا = ت^۱]

۱۱۔ ثابت کرو کہ

مجموع لا^۱ فرلا اور مجموع لا^۱ جب لا^۱ فرلا

محدود اور قابل تعین ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مجموع لا^۱ فو^۱ فرلا = $\frac{1}{p}$ مجموع لا^۱ فو^۱ فرلا =

۱۳۔ ثابت کرو کہ مکملہ

مجموع لا^۱ فو^۱ فرلا (جہاں ن < ۱)

محدود اور قابل تعین ہے۔

۱۴۔ اگر ن < ۱ تو ثابت کرو کہ

مجموع لا^۱ فو^۱ فرلا = $\frac{1}{p} (ن - ۱)$ مجموع لا^۱ فو^۱ فرلا

اگر ن مثبت صحیح عدد ہے تو

مجموع لا^۱ فو^۱ فرلا = $\frac{1}{p}$ ک

۱۵۔ اگر ع = مجموع لا^۱ فو^۱ فرلا تو ثابت کرو کہ ع = $\frac{ن}{ع}$ ع = ۱۔

مستقل ہے اور اس کا مجموعہ ت ا د ت + ف (ا) کے درمیان واقع ہوتا ہے
بشرطیکہ تکملہ ت = ف (لا) فرلا عدد ہو۔ اس کو سلسلہ

$$\frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(2+n)} + \frac{1}{(3+n)} + \dots \dots \dots \text{پر استعمال کرو۔}$$

امثلہ ۳۵

- ۱۔ اگر ایک گیس کا دباؤ (د) ہو اور حجم (ح) اور ان میں تعلق ہو د ح = مستقل
تو حجم ح سے ح تک پھیلنے میں کام و ا ح لوک $\frac{1}{ح}$ ہو گا۔
- ۲۔ اگر اس میں رشتہ د ح $\frac{1}{ح}$ = مستقل ہو تو کام ہو گا

$$\frac{1}{ح} - \frac{1}{د ح} = (د ح - د ح) \frac{1}{ح}$$

- ۳۔ ایک لچکدار رسی کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے طبعی طول پر اس کا اضافہ۔
ایک طول سے دوسرے طول تک رسی کو کھینچ کر ناپنے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ دہری
ہے گویا تناؤ مستقل ہے اور اس کے ابتدائی اور آخری تناؤں کے نصف مجموعہ کے
مساوی ہے۔

- ۴۔ ایک یونٹ کو لاتنا ہی فاصلہ سے سطح زمین تک لانے میں جاذبہ ارض جو کام کرتی ہے
وہ ن فٹ یونٹ کے مساوی ہے جہاں زمین کا نصف قطر ن فٹ ہے۔ (یہ
ان لوگ قوت جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس ہوتی ہے)

آمحواں با ط

ہندی استعمال

۹۹۔ رقبہ کی تعریف۔ اصول اقلیدس میں ایسے مسائل

ثابت کئے گئے ہیں جن سے اصطلاح ”رقبہ“ کا ٹھیک مفہوم متعین ہوتا ہے مگر صرف اس صورت میں جبکہ اشکال بالتمام خطوط مستقیم سے گھری ہوئی ہوں۔ بالخصوص یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ایک مستطیل کسی دی ہوئی شکل کے مساوی ایک دئے ہوئے قاعدہ پر بنایا جاسکتا ہے، یہ قاعدہ کوئی اختیاری طول ہو سکتا ہے مثلاً طول کی اکائی۔ اس شکل کا رقبہ اس نسبت کے ناپ سے تعبیر ہوگا جو اس مستطیل کو اکائی طول والے ایک مربع کے ساتھ ہے۔ اس عمل کا اطلاق ایسی شکل پر نہیں ہو سکتا جو پورے یا جزوی طور پر منحنی خطوط سے گھری ہوئی ہو۔ اس لئے ہمیں دیکھنا ہے کہ ایسی صورت میں ”رقبہ“ کے مفہوم کی تعریف کیا اختیار کی جائے۔ اسے حاصل کرنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ دو مستقیم الاضلاع شکلیں بنائی گئی ہیں ایک منحنی شکل کے باہر اور دوسری اس کے اندر پہلی شکل کے اندر یہ منحنی رقبہ شامل ہوتا ہے اور دوسری اس منحنی رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے۔ اندرونی شکل کے رقبہ کے لئے اوپر کی انتہا ہے اور بیرونی شکل کے لئے نیچلی انتہا ہے۔ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ دونوں انتہا میں نقطہ لاق ہیں۔ اس مشترک انتہائی قیمت کو اردوئے تعریف دی ہوئی منحنی الاضلاع شکل کے ”رقبہ“ کا ناپ اختیار کیا جاتا ہے۔

مثلاً دائرہ کی صورت میں (دیکھو شکل ۱۷ دفعہ ۱) اگر n ق اندرونی
 کثیر الاضلاع کا ضلع ہو تو کثیر الاضلاع کا رقبہ $\frac{1}{2} \times \text{ول } n \times \text{ق}$ ہوگا۔
 اب $\text{ول } n$ نصف قطر سے کم ہے اور n ق دائرہ کے محیط سے
 کم ہے۔ اس لئے اندر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کی اوپر کی انتہا
 $\frac{1}{2} \times 2 \times \pi \times r$ سے بڑھ نہیں سکتی جہاں دائرہ کا نیم قطر r ہے۔ اسی طرح
 ثابت ہو سکتا ہے کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے رقبہ کی نیچلی انتہا πr^2 سے کم نہیں
 ہو سکتی۔ علاوہ اس کے اندرونی اور متناظر بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کا
 فرق ہے $\frac{1}{2} \times \text{ول } n \times \text{ت}$ اور یہ کم ہے $\frac{1}{2} \times (\text{ول } n) \times \text{صہ}$ جہاں
 جہاں صہ n کی بڑی سے بڑی قیمت ہے۔ چونکہ یہ استفادہ جمیونی
 بنائی جا سکتی ہے جب قدر ہم چاہیں اس لئے مذکورہ بالا اوپر کی اور نیچلی انتہائیں مساوی
 ہیں، اس لئے ہر ایک πr^2 کے مساوی ہے۔
 اسی طور پر ثابت ہو سکتا ہے کہ نیم قطر کے کسی دائرہ کے قطع کا رقبہ
 $\frac{1}{2} \times \text{طما}$ ہے جہاں طما قطع کا زاویہ ہے۔

۱۰۰۔ کارٹیزی محمد دول میں رقبہ کے لئے ضابطہ۔

اگر کارٹیزی محمد دول میں منحنی کی مساوات

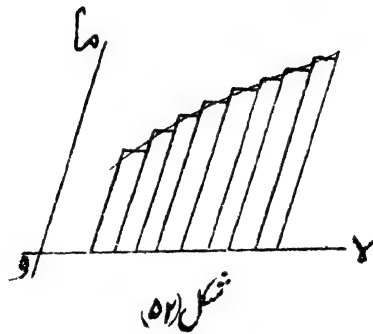
ما = فضا (لا) (۱)
 ہو تو منحنی محور کا اور معینوں لا = ر، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا رقبہ
 فضا (لا) فرلا یا فضا (لا) فرلا (۲)

تسلیم کر لیا گیا ہے کہ فضا (لا) اس نمونہ کا تقاضا ہے جس کا دفعہ ۹۰ میں ذکر کیا گیا نتیجہ بالا
 پہلے دفعہ کی تعریف اور دفعہ ۱ کی تحقیق سے فوراً اخذ ہو جاتا ہے۔ اگر محور مال ہوں اور ایک
 دوسرے کے ساتھ زاویہ مساوی بنائیں تو خصوصی تطیل ماصف لا کی بجائے جو مجموعہ میں
 واقع ہوتے ہیں اور جنکی انتہا رقبہ ہے خصوصی متوازی الاضلاع ماصف لا جب مساوی
 ہونگے۔ رقبہ جو منحنی محور کا اور احاطہ کرنے والے دو معینوں کے درمیان

گھرا ہوا ہے اب ہوگا

جب سے جی ما فرلا (۳)

بے دے ہوئے فاص حدود کے درمیان لینا چاہئے۔



مثال ۱۔ ناقص $\frac{لا^2}{2} + \frac{ما^2}{2} = ۱ \dots \dots \dots (۱)$
کے ریلج کا رقبہ دریافت کرو۔

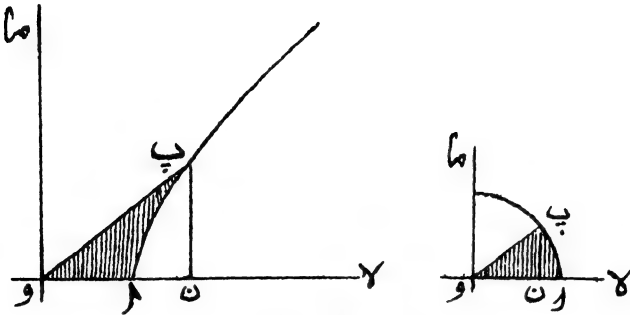
رقبہ مطلوبہ = $\frac{لا}{2} \times جی$ ما فرلا = $\frac{لا}{2} \times جی$ ما فرلا = $\frac{۱}{۴} \times \pi$ اس
حدود تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں معلوم کی گئی تھی۔
اس لئے کل ناقص کا رقبہ = $\pi \times لا \times ب$

مثال ۲۔ قائم زائد $لا - ما = ۱ \dots \dots \dots (۵)$

کی مثبت شلخ کے لئے رکھو $لا = جنم ع$ ، $ما = جنم ع$ (۶) ۲۳۴
کیونکہ (۵) کو پورا کرتی ہیں اور ایسے $لا$ ، $ما$ کی قیمتوں کی مطلوبہ سمت پوری ہوتی ہے
یعنی محمد لا اور اس میں کے درمیان کا رقبہ جس کا تعین تغیر سے ہوتا ہے
 $\frac{لا}{2} \times جی$ جنم ع فرع = $\frac{۱}{2} \times جی$ (جنم ع - ۱) فرع

$$\frac{1}{4} = \text{جنہ } ۶۲ - \frac{1}{4} \dots\dots\dots (۷)$$

۷۔



شکل ۵۳

(۷) سے بائیں جانب کی شکل میں پ ارن کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

اس لئے زائدی قطع و ارن کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{4} \text{ پ ن } \times \text{ون} - \text{رقبہ پ ارن} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots (۸)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں زائدی تفاعلوں جنہ و جنہ و غیرہ کے حصہ و اور دائری تفاعلوں جم طہ، جب طہ و غیرہ کے حصہ طہ میں ایک مشابہت ہے۔ ہر صورت میں تغیر متغیر نقطہ پ کے جواب میں جس کے محدود (جنہ و جنہ و) یا (جم طہ، جب طہ) ہیں طاعی رقبہ ارن کے دوچند کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{عام قطع زائد} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1 \dots\dots\dots (۹)$$

کی صورت میں مثبت شلخ پر کسی نقطہ کے محدود ہیں

$$1 - 1 = 0 \text{ جنہ و } ۶۲ = \text{ب جنہ } ۶ \dots\dots\dots (۱۰)$$

اور طاعی رقبہ $\frac{1}{4}$ ارن ہے۔

مثال ۳۔ قطع مکانی کی مساوات بلحاظ کسی قطر اور اس پر کے ماس کے ہے

$$۴ = ۴ \dots\dots\dots (۱۱)$$

۲۳۵

اس قطعہ مکانی کا رقبہ جو وتر لا = عا کاٹا ہے یہ ہے

$$۲ \text{ جب سے } \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi a^2$$

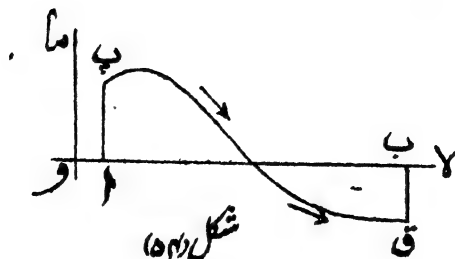
اگر ۲ بیہ وتر کا طول ہو۔
پس کسی قطعہ مکانی کا رقبہ اس ستطیل کے دو تہائی کے مساوی ہے جس کا
ایک ضلع قطر پر وتر کا مقطوعہ (عا) ہے اور دوسرا مرتب پر وتر کا مثل
(۲ بیہ جب سے) ہے۔

۱.۱۔ رقبہ کو کیا علامت دی جانی چاہئے؟

دفعہ میں چیکے سے یہ مان لیا گیا ہے کہ ب کے ر اور معین فضا (لا)
تکمل کی تمام سمتیں مثبت ہیں۔ اگر ان قیود کو چھوڑ دیا جائے تو باستانی
معلوم ہوگا کہ تکملہ

فضا (لا) فرلا (۱)

± میں کے مساوی ہے جہاں میں وہ رقبہ ہے جو منحنی، محور لا
اور اطراف کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ مثبت علامت لینا چاہئے
اگر پ سے ق کی



سمت میں جانے سے رقبہ دائیں جانب واقع ہو اور منحنی علامت (-) لینا
 یا - بے اگر رقبہ بائیں جانب واقع ہو جہاں 'ا' ق ب
 لا = ا' لا = ب کے جواب میں منحنی کے معنی ہیں۔ اگر منحنی 'ا' ب
 کے درمیان محور لا کو کاٹتا ہے تو مکملہ سے رقبہ کا وہ اضافہ (مثبت یا منفی)
 حاصل ہوتا ہے جو دائیں طرف والے رقبہ کو بائیں طرف والے رقبہ پر ہے۔
 ان تعینات کے ساتھ بھی ضابطہ

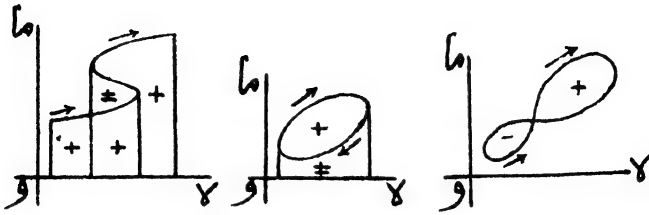
فما (لا) فلا = ± مس (۲)

کا اطلاق صحیح طور پر اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ تمام وقفہ ب۔ ا
 بحر میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما یا فما (لا) کی ایک یگانہ قیمت
 ہو۔ اگر لا کی بجائے ایک اور مقدار ت، متبوع متخیر قرار دیکھائے اور
 یہ ایسی ہو کہ جیسے ت بڑھے اس کا متناظر نقطہ پ مسلسل طور پر منحنی کے
 ساتھ حرکت کرے تو ضابطہ

ما $\frac{فلا}{رت}$ فرت (۳)

سے عام معنوں میں وہ رقبہ تعبیر ہوگا جو منحنی، محور لا اور نقاط پ، پ
 [جبکہ لئے ت = ت، اور ت = ت] کے معنوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یعنی

* یہ مان لیا گیا ہے کہ محاورہ لا، ما کی سمتیں وہ ہیں جو شکل میں دکھائی
 گئی ہیں۔ مقابل صورت میں الفاظ ”دائیں“، ”بائیں“ کو باہم بدل
 دینا چاہئے۔
 + مثلاً نیا متغیر منحنی کی قوس میں لی جاسکتی ہے جسے منحنی کے کسی ثابت نقطہ
 سے ناپنا شروع کیا گیا ہو۔



شکل (۵۵)

معین ما کے دائیں جانب حرکت کرنے سے جو رقبہ کا حصہ مرسم ہوتا ہے اسکا اضافہ اس رقبہ پر جو بائیں جانب حرکت کرنے سے مرسم ہوتا ہے اس تکملہ سے تعبیر ہوتا ہے یا اس صورت میں ہوگا جبکہ ما مثبت ہو۔ اگر ما منفی ہو تو اس تکملہ سے رقبہ کی وہ زیادتی تعبیر ہوگی جو بائیں جانب کے مرسم رقبہ کو دائیں جانب کے مرسم رقبہ پر حاصل ہے۔

اگر ت کی کسی قیمت کے لئے 'پ ایک بند منحنی مرسم کر کے اپنے پہلے مقام پر واپس آجائے تو تکملہ

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad (۴)$$

کو مناسب حدود کے درمیان لینے سے منحنی کے اندر کا رقبہ حاصل ہوگا اور اسکی علامت + یا - ملے گی بموجب اس کے کہ رقبہ پ کے دائیں یا بائیں جانب رہے جبکہ نقطہ ت کے بدلنے کے ساتھ منحنی مرسم کرے۔ اگر منحنی اپنے آپ کو کاٹے تو مضابطہ (۴) سے گھرب ہوئے رقبوں کی وہ زیادتی حاصل ہوگی جو دائیں

۴ دفعہ ۸۹ میں نمائندہ تصویر کا حوالہ دیا گیا ہے بھاپ نے فشارہ (پیشن) پر آگے کی ماریں جو کام کیا اسکی زیادتی اس کام پر جو پیچے دار ماریں بھاپ خارج کرنے میں ہوا اس رقبہ سے تعبیر ہوتی ہے جو منحنی کے اندر گھرا ہوا ہے۔ پس اس رقبہ سے وہ خالص گواہائی حاصل ہوتی ہے جو فشارہ کو ایک پوری ضرب میں دی گئی۔

طرف کے رقبوں کو بائیں طرف کے رقبوں پر حاصل ہے۔ (دیکھو شکل ۵۵)
 بعض اوقات منحنی کا رقبہ معلوم کرنے میں یہ زیادہ سہولت مند ہوتا ہے کہ
 لا کی بجائے ما کو تغیر متبوع مانا جائے۔ ایسی صورت میں رقبہ جو منحنی، محور صا
 اور خطوط ما = ہ، ما = ک کے درمیان گھرا ہوا ہے صیرجاً اسی قسم کی قیود کے
 تابع ذیل کے تکرار سے حاصل ہوتا ہے

لا فرما (۵)
 زیادہ عام ضابطہ (۳) کے جواب میں یہ ہوگا

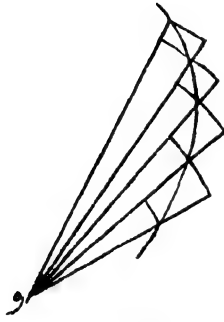
لا فرما فرت (۶)
 معاینہ سے معلوم ہوگا کہ علامت کا قاعدہ الٹ دیا جانا چاہئے۔

اگر ایسا کیا جائے تو جملہ $\frac{1}{p}$ (لا فرما - ما فرلا) فرت (۷)
 سے بند منحنی کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے جہاں ت کے حدود ایسے ہیں کہ نقطہ (لا، ما)
 اپنے ابتدائی مقام پر واپس آجاتا ہے۔ اب علامت کا کلیہ یہ ہے کہ جملہ (۷)
 مثبت ہوتا ہے جبکہ رقبہ ت کے بڑھنے کی سمت میں حرکت کرنے والے
 نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔

۱۰۲۔ قطبی محدودوں کے لحاظ سے رقبے۔ اگر منحنی کی مساوات
 قطبی محدودوں میں

ر = ف (ط) (۱)
 ہو تو رقبہ جو منحنی اور دو سمتی نیم قطروں ط = ع، ط = ب کے
 درمیان گھرا ہوا ہے وہ اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \int_{\text{مف}}^{\text{مف}} \text{رفطما یا } \frac{1}{2} \int_{\text{مف}}^{\text{مف}} [\text{فما (طما)}] \text{رفطما} \dots (۲)$$



شکل (۵۶)

کیونکہ جیسا ساتھ کی شکل میں

دکھایا گیا ہے ہم دائروں کے

قطاعوں کی مدد سے گزرنے

والا رقبہ میں اور گھرا ہوا

رقبہ میں مرتب کر سکتے

ہیں۔ ان میں سے کسی ایک

قطاع کا رقبہ $\frac{1}{2} \int_{\text{مف}}^{\text{مف}} \text{رفمف طما}$

ہے جہاں اس کا نصف

قطر ہے اور رقف طما اس کا زاویہ اور اس کے قطاعوں کے کسی ایک سلسلہ کا

مجموعہ اس نمونہ کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \int_{\text{مف}}^{\text{مف}} \text{رفمف طما} \dots (۳)$$

اس لئے سلسلہ کی یگانہ انتہا ہے جو (۲) سے تعبیر ہوتی ہے۔

یہاں مان لیا گیا ہے کہ جہاں $\int_{\text{مف}}^{\text{مف}}$ اور ابتدائیں سے گزرنے والا

کوئی استہتی نیم قطر قوس کو صرف ایک نقطہ پر کاٹتا ہے۔ لیکن اگر ایک نیا

متغیر متبوع کا ایسا داخل کیا جائے کہ ت کے بڑھنے سے متناظر نقطہ

پ یعنی پراسل طور سے حرکت کرے تو جملہ

$$\frac{1}{2} \int_{\text{مف}}^{\text{مف}} \text{رفمف طما} \dots (۴)$$

خالص اس رقبہ کو تعبیر کرے گا جو استہتی نیم قطر ت کے ت سے ت تک

جانے میں عبور کرتا ہے یعنی اس جملہ سے رقبہ کے ان حصوں کا اضافہ (مثبت یا منفی)

جو طما کے بڑھنے کی سمت میں استہتی نیم قطر کے حرکت کر نیسے مترجم ہوتے ہیں ان حصوں پر جو

مقابل سمت میں مرسم ہوتے ہیں تعبیر ہوگا۔ علاوہ اس کے اگر ت کے بڑھنے سے نقطہ پ ایک بند منحنی مرسم کر کے واپس اپنی ابتدائی حالت میں آجائے تو جملہ

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \frac{dr}{d\theta} d\theta \quad \text{فرت} \quad \dots \dots \dots (5)$$

سے ت کے مناسب حدود کے درمیان عام معنوں میں وہ رقبہ ملے گا جو منحنی سے گھرا ہو یعنی (ت کے بدلنے کے ساتھ جیسے نقطہ پ منحنی مرسم کرتا ہے) اس نقطہ پ کے بائیں جانب جو رقبہ واقع ہوتا ہے اس کی زیادتی اس رقبہ پر جو اٹنائے حرکت میں دائیں جانب واقع ہوتا ہے (یہ زیادتی) اس جملہ (5) سے تعبیر ہوتی ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۱ کے ساتھ۔

یہ دیکھا جائے کہ ضابطہ (5) دفعہ ۱۰۱ کے ضابطہ (۷) کا مثال ہے۔ اگر دو ساتھ کے نقطوں پ اور ق کے محدود بالترتیب (لا، ما) اور (لا + مفا، ما + مفا) ہوں تو عنصری مثلث و پ ق کا رقبہ علامت کی قرارداد کے ماتحت منطیلی ہندسہ کے ایک ضابطہ کی رو سے یہ ہے

$$\frac{1}{2} (لا مفا - ما مفا)$$

ہماری موجودہ ترقیم میں $\frac{1}{2} ر مفا ط$ سے وہی چیز تعبیر ہوتی ہے۔ مثال ۱۔ دائرہ اگر $ر = ۲$ جب ط $\dots \dots \dots (6)$ کا رقبہ (دیکھو شکل ۳۸ دفعہ ۶۲) ہے

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \frac{dr}{d\theta} d\theta = ۲ \int_0^{\frac{\pi}{2}} ۲ \frac{dr}{d\theta} d\theta = ۲ \dots (7)$$

ماصل یہ مضیق تصدیق ہے یا مثلثی شکل کی قیمت نئی طرح سے دریافت کرنا ہے۔ مثال ۲۔ قطع مکانی

$$= ۲ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{۲}{۱ + \cos \theta} d\theta \quad \dots \dots \dots (8)$$

کے قطع کا رقبہ دو ایسی قطروں کے درمیان یہ ہے

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2} \int \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2} \left[\log r \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2} \left[\log \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log \frac{r_2}{r_1} \right] = \frac{1}{2} \left[\log \frac{r_2}{r_1} \right] \dots (9)$$

جسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اگر حدود $\frac{r_1}{2}$ اور $\frac{r_2}{2}$ ہوں تو اس حصہ کا رقبہ بتائے جسے وتر خاص کا ٹنڈا ہے جو $\frac{r_2}{2}$ ہے۔
مثال ۳۔ قطبی محدودوں میں قطع ناقص کی مساوات ہے

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{e \cos \theta}{a} \dots (10)$$

اس لئے رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

..... (11)

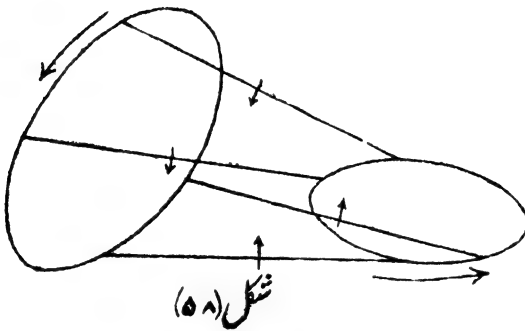
آخری تکرار کی قیمت دفعہ ۹۶ میں $\frac{1}{2} / (r_1 - r_2)$ معلوم کی گئی ہے۔ اس لئے مطلوبہ رقبہ $\frac{1}{2} (r_1 - r_2)$ ہے۔

۱۰۳۔ رقبہ جو ایک متحرک خط اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے۔

ایک متحرک خط جس کا طول مستقل یا تغیر ہے اپنی حرکت سے ایک سطح مستوی میں جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس طرح محسوب ہو سکتا ہے۔

خط کے دو متصل مقام پ ق اور پ ق ہیں اور انکی سمتیں ج پر ملتی ہیں۔ فرض کرو کہ پ ق اور پ ق کے وسطی نقطے سے باہر م ہیں اور م سے ایک دائرہ کی قوس ہے جو ج کو مرکز مان کر کھینچی جائے اگر زاویہ پ ج پ کو مفطما سے تعبیر کیا جائے تو آخر الامر رقبہ پ ق ق پ = ۵ ق ج ق - ۵ پ ج پ

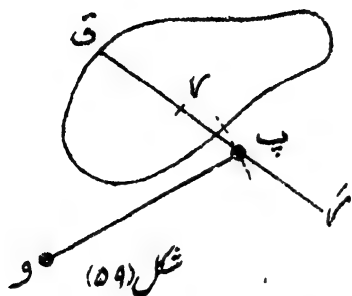
سرے دو بند ٹمچنیوں کو مرسم کریں اور آخر میں پ ق اپنے اصلی مقام پر آجائے تو اوپر کی قرارداد کے موافق، ق کے راستہ سے جو رقبہ محیط ہوتا ہے اسکی زیادتی اس رقبہ پر جو پ کے راستہ سے محیط ہوتا ہے اس تکملہ (۱) سے تعبیر ہوگی بشرطیکہ ان رقبوں کی علامتیں دفعہ ۱۰۲ کے قاعدہ کے مطابق ہوں۔



۱۰۴۔ ایسلسر کے سطح پیمائش (Amsler's planimeter) کا نظریہ -

سطح پیمائش ایک آلہ ہے جس کی مدد سے کاغذ پر کھینچی ہوئی کسی شکل کا رقبہ آلی یا حسی طریقہ پر دریافت کیا جاتا ہے۔

ایسلسر کئی آلات ایجاد ہوئے ہیں، لیکن سب سے سادہ اور مقبول (ایسلسر) کا سطح پیمائش جو ۱۸۵۲ء میں ایجاد ہوا۔ ایسلسر ٹراف ہاسن (سوئٹزرلینڈ) کا رہنے والا تھا۔ یہ آلہ دو سلاخوں وپ، پ ق پر مشتمل ہے جو آزادانہ طور پر پ پوسل کی جاتی ہیں۔ سلاخ وپ ایک ثابت نقطہ کے گرد گھوم سکتی ہے۔ اگر ایک مرسم نقطہ (پوسل) سلاخ پ ق کے ساتھ ق پر



لگا دیا جائے اور اس کو
ایک بند مغنی کے گرد پھرایا
جائے تو پ ایک دائرہ
کی قوس پر آگئے پھر اتنا
کرے گا تو یہ صفر قیاس کا
احاطہ طے کرے گا۔ اس کے
دفعہ ۳۰ کے آخر میں جو مسئلہ
بیان ہوا اس کے مطابق

ق نے جو قسبہ مرتب کیا وہ ساوی ہوگا

(۱) کی فرشتہ
کے جہاں پ ق کا طول ل ہے اور ل فرشتہ سے پ ق کے
اصلی نقطہ سر کی کلی حرکت تعبیر ہوتی ہے جبکہ ہمیشہ اس کا پ ق کے عمود کی
سمت میں اندازہ کیا جائے۔

اب جیسا کہ آلہ کے قیمتی استعمال میں عام طور پر ہوتا ہے اگر پ ق
پورا چکر لگانے کے بغیر اپنے اصلی مقام پر واپس آجائے تو سر کی کل حرکت
پ ق پر عمود و سمت میں رہی ہوگی جو خط پ ق کے کسی اور نقطہ
خلا سر کی ہے۔ کیونکہ اگر سر کے راستوں کے متناظر اجزاء مف ش
مف ش ہوں جنہیں اوپر کی طبع نایا گیا ہے تو

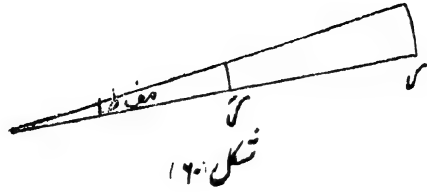
مف ش = مف ش + سر = مف ط

جہاں سر کے متعلق مقامات کے درمیان زاویہ مف ط ہے۔ اس کے

مف ش = مف ش + سر = مف ط = مف ش (۲)

کیونکہ مفروضہ حالات کے ماتحت مف ط =

بالمعوم یہ ہی بات انہیں ہے جو سر کے راستہ کا طول۔



آلہ کی حقیقی ساخت میں ایچ پی کی طرف خارج کئے ہوئے خط ق پ پر کے نقطہ س کی تکمیلی یا کملی حرکت، سلاخ کے عمود وار ایک چھوٹے پھیپہ کے ذریعہ درج (Record) کی جاتی ہے جہاں پھیپہ کا محور پ ق کی سمت میں ہوتا ہے جیسے ق کوئی انجنی مرستم کرتا ہے پھیپہ کا غڈ کی سطح میں جس پر انجنی کھنچا ہوا ہے تھوڑا لڑکتا ہے اور تھوڑا پھسلتا ہے اور پھیپہ کا گھومنا س کے عمودی ہٹاؤ کے عین متناسب ہے۔ پہلے پر زور ہے لگتے ہوئے ہیں اور جزوی گردشوں کے ریکارڈ کے لئے ایک ثابت نمائندہ ہوتا ہے۔ پوری گردشیں ایک Dial and counter کی مدد سے ناپی جاتی ہیں۔

طول پ ق کے بدلنے کے لئے بھی انتظام ہوتا ہے۔ اس سے

محض اندراج کا پیمانہ بدلتا ہے۔

زیادہ تر نسبتہ ثبوت تحلیلی طریق پر ہے۔ و میں سے قائم محور لو، فرض کر کے

و پ، پ ق محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بالترتیب زاوے طما اور قما بناتے ہیں، رکھو و پ = ل، پ ق = ل توفی کے محدود

سب ذیل ہیں

لا = (رجم طما + ل جم قما) = (رجب طما + ل جب قما)۔ (۳)
اسلئے لا مف ما = (رجم طما + ل جم قما) = (رجب طما + ل جب قما)
ل جم قما مف قما

(رجب طما + ل جب قما) (رجب طما + ل جب قما مف قما)
= (مف طما + ل مف قما + ل جم قما) (مف طما + ل جب قما مف قما)

$$= \text{مف} \{ \text{ل} + \text{ط} + \text{ل} + \text{ف} + \text{ل} \text{ جب } (\text{ف} - \text{ط}) \}$$

$$+ ۲ \text{ ل } \text{جم} (\text{ف} - \text{ط}) \text{ مف } \text{ط} \dots (۴)$$

پ ق میں کسی نقطہ پر کا صغاری ہٹاؤ مف ثا، جسے پ ق پر عمود وار
نایا جائے دو ہٹاؤں سے مرکب ہوگا، ایک ہٹاؤ پ کے لحاظ سے دوسرا
خود پ کا ہٹاؤ جسے پ ق کی عمود وار سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اسلئے
اگر پ س = ب تو

$$\text{مف ثا} = \text{ب مف ف} + \text{مف ط} \times \text{جم} (\text{ف} - \text{ط}) \dots (۵)$$

اس لئے $\frac{1}{4} (\text{لا مف ما} - \text{ما مف لا})$

$$= \frac{1}{4} \text{ مف } \{ \text{ل} + \text{ط} + \text{ل} + \text{ب} (\text{ل} - \text{ب}) + \text{ل} \text{ جب } (\text{ف} - \text{ط}) \}$$

$$+ \text{ل مف ثا} \dots (۶)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ق اس طور پر پور اعلقہ مرکب کرے کہ ط اور ف
واپس اپنی ابتدا کی قیمتوں پر عود کریں تو

$$\frac{1}{4} (\text{لا مف ما} - \text{ما مف لا}) = \text{ل مف ثا} \dots (۷)$$

دائیں جانب کا جملہ دفعہ ۱۰۱ کی رو سے اس رقبہ کے مساوی ہے جو
قطعہ سے گھرا ہوا ہے۔

۱۰۵۔ مجسموں کے حجم۔ ایسے مجسم کے ”حجم“ کی بھی عام تعریف

کرنا جو بالتمام مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو کسی نہ کسی شکل میں ”انتہائی قیمت“
کے تخیل کو داخل کئے بغیر ناممکن ہے۔

آقلیدسی طریقوں سے یہ ضرور ثابت ہو سکتا ہے کہ دو قائم تنواری سطحوں
کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان نسبتوں سے مرکب
ہوتی ہے جو ایک کے تین متساوی کناروں کو ایک ایک کر کے دوسرے کے
تین متساوی کناروں کے ساتھ (نسبتیں) ہوں۔ اور زیادہ عام طور پر دو مشنوروں

کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان کے ارتفاعوں کی نسبت اور ان کے قاعدوں کی نسبت سے مرکب ہوتی ہے۔ اس طریق پر کسی منشور اور اکائی مکعب کی باہمی نسبت کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

لیکن ایک دے ہوئے کثیر السطوح کو منشوروں کی محدود تعداد میں کاٹنا عام طور پر ممکن نہیں۔ سادہ اور عام طریقہ یہ ہے کہ اس کو مضلع مخروطوں (میناروں) میں کاٹا جائے جن کے مشترک رأس اندر کے کسی نقطہ پر ملیں اور کثیر السطوح کے چہرے ان کے قاعدے ہوں۔ لیکن مینار اور منشور کے مجموں کا مقابلہ بغیر انتہائی قیمت کے تحلیل کو داخل کرنے کے نہیں ہو سکتا۔ مثلثی منشور کو البتہ مساوی ارتفاع اور مساوی قاعدوں والے تین میناروں میں کاٹا جاسکتا ہے (اقلیدس ص ۱۴۴)۔
لیکن صغاری عناصر کے تحلیل کو شامل کئے بغیر ان میناروں کو آپس میں مساوی بنانا نہیں کیا جاسکتا۔

ایسے مجسم کے حجم کی عام تعریف جو کسی طرح کی سطحوں مستوی یا منحنی سے گھرا ہوا ہو ایسی ہی مرتب ہو سکتی ہے جیسے مستوی شکل کے رقبہ کی صورت میں (شکل ۹۹)۔ ہمیشہ دو شکلیں بنانا ممکن ہوگا جو منشوروں سے بنی ہوئی ہوں، ان میں سے ایک دے ہوئے مجسمہ کو گھیرے اور دوسری مجسم سے گھری ہوئی ہو اور ان کے مجسموں کا فرق اتنا کم ہو جتنا ہم چاہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کے حجم کی انتہائی قیمت کو جب ان شکلوں کا فرق لا انتہا کم ہو جائے بطور تعریف کے اختیار کر لیا جاتا ہے کہ یہ دے ہوئے مجسمہ کا ”حجم“ ہے۔ پہلے کی طرح ہم اس امر کا اطمینان کر سکتے ہیں کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے۔

مستوی متوازی سروں والے کسی اسطوانہ (قائم یا مائل) کا حجم کسی سرے کے رقبہ اور سروں کے درمیان کے عمودی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ کیونکہ حائل اور نیز محیط منشوری شکلیں بنائی جاسکتی ہیں جنکے قاعدے ایسے کثیر الاضلاع ہیں جو اسطوانہ کے قاعدہ کا احاطہ کرتے ہیں اور اس سے محیط ہو جاتے ہیں۔ اوپر کا بیان ان میں سے ہر شکل کے لئے درست ہے۔ اسلئے انتہائی قیمت اسطوانہ کے لئے بھی درست ہے۔ دائری اسطوانہ کا حجم اسلئے $\pi r^2 h$ ہے

جہاں راقاعدہ کا نصف قطر ہے اور ف اس کا ارتفاع۔ اس طرح متوازی مستوی سطحوں والے اسطوانہ کا حجم معلوم ہو گیا۔ اب اگر ہم چاہیں تو بطور ضمنی اشکال کے جو اوپر عام تعریف میں استعمال کی گئی ہیں منشوروں کی بجائے ایسے اسطوانے استعمال کر سکتے ہیں۔ کسی طریقہ سے بھی آخری انتہا لازماً وہی رہنی چاہئے۔

۱۰۶۔ کسی مجسم کے حجم کے لئے عام جملہ۔

محور کا کو کسی مناسب سمت میں اکھنچ لیا جائے۔ مبدأ سے فاصلہ لا پر ایک سطح مستوی لیکر جو محور پر عمود ہو اگر مجسم کو تراشا جائے تو فرض کرو کہ اس تراش کا رقبہ F (لا) ہے۔ اگر وقفہ h لا پر محور کا کے عمود دار مستوی سطحوں کا نظام کھینچا جائے تو ظاہر ہے کہ حجم مطلوبہ ذیل کے مجموعہ کی انتہا ہوگی

ح F (لا) h (۱)

کیونکہ اس مجموعہ کا ہر جزو ایک اسطوانہ کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کا ارتفاع h لا ہے اور قاعدہ F (لا)۔ اس لئے حجم مطلوبہ حاصل ہوگا اس ضابطہ سے

ح F (لا) F (لا) (۲)

جہاں لا کو مناسب حدود کے اندر لیا جانا چاہئے۔

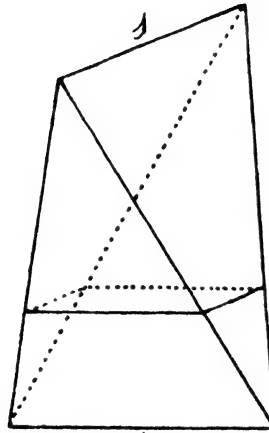
مثال ۱۔ مخروط (یا مینار) کی صورت میں جو قائم یا مائل ہو اور کسی قاعدہ پر کھڑا ہو مبدأ و اس پر لا اور محور کا قاعدہ پر عمود دار۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ A ہے اور ارتفاع F تو مبدأ و سے فاصلہ لا پر تراش کا رقبہ

$$F(لا) = \left(\frac{لا}{F}\right)^2 A \dots\dots\dots (۳)$$

کیونکہ متشابہ رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ اس لئے حجم

$$= \frac{1}{3} F^3 لا^3 \dots\dots\dots (۴)$$

یعنی قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کے ایک تہائی کے مساوی ہے۔
مثال ۲۔ چار سطحی کا حجم ہے $\frac{1}{3}$ ص Δ جب ص (۵)
جہاں Δ کے مقابل کے کناروں کے طول ہیں، ص ان کے درمیان کم سے کم
فاصلہ ہے اور ص انکی سمتوں کے درمیان زاویہ ہے۔



شکل (۶۱)

چار سطحی کو سروں Δ کے متوازی سطحوں سے تراش کر یا ایک پتروں یا چادروں میں
تقسیم کرو۔ یہ تراشیں کم سے کم فاصلہ ص پر عمود وار ہوں گی۔ شکل (۶۱) کے حوالہ سے ظاہر
ہے کہ نظام کے اس ستوی کی تراشیں جو سرے Δ سے فاصلہ Δ پر واقع ہے ایک
متوازی الاضلاع شکل ہوں گی جس کے اضلاع ہیں

$$\frac{\Delta}{\text{ص}} \times \Delta \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ص}}{\Delta} \times \Delta$$

۳۳۵

اور اس کا رقبہ ہے $\frac{\Delta}{\text{ص}} (\Delta - \text{ص})$ جب ص

اس لئے چار سطحی کا حجم ہے $= \frac{\Delta}{\text{ص}} \text{ جب } \Delta (\Delta - \text{ص})$ فلا

جودی ہوئی قیمت میں تحویل ہو جاتا ہے۔

۱۰۷۔ گردشی مجسم - فرض کر دو کہ تکوینی منحنی

ما = فنا (لا) (۱)

ہے محور کا متنازل کا محور ہے اور مجسم مستوی سیروں سے گھرا ہوا ہے جو محور کا پر عمود ہیں۔ اس صورت میں رقبہ ف (لا) اس دائرہ کا رقبہ ہے جس کا نیم قطر ما ہے اور یہ π ما ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ حجم ہے

π ما فر لا (۲)

جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ دراصل اس مجموعہ کا ہر عنصر جسکی انتہا اوپر کا ٹکڑہ ہے ایک گول تختی کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کی موٹائی صفت لا ہے اور رقبہ π ما۔

مثال ۱۔ دائرہ کی مساوات جبکہ مبدأ اس کے محیط پر کا کوئی نقطہ ہو یہ ہے

ما = لا (۱۲ - لا) (۳)

اس لئے نقطہ کرہ کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\pi \int_{\frac{1}{3}}^{1} (12 - x) dx = \pi \left[12x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$\pi = \pi (1 - \frac{1}{3}) \left(\frac{1}{3} \right)$ (۴)

جہاں کرہ کا نیم قطر ہے۔ پورے کرہ کے لئے ف = ۱۲ اور حجم ہے $\frac{4}{3} \pi$

یا مائٹ مستدیر اسطوانہ کے حجم $(\pi \times 12)$ کا دو تہائی۔

مثال ۲۔ منحنی ما = لا (۵)

کو محور کا کے گرد گھمانے سے جو مکافی نمایدا ہوتا ہے اس کے قطعہ یا حصے کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$n \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \text{..... (4)}$$

مثال ۳۔ لنگر چھلے کا حجم دریافت کرو جو دائرہ

(۴) = ب' (۱-۶) + (۱-۶)

ب کے گرد پھرانے سے پیدا ہوا ہے جہاں $a < b$ دیکھو شکل (۶۶)۔
 = ب کے درمیان لاکھ ہر ایک قیمت کے لئے مائی دہشتیں ہیں فرض کرو ما، ما، بیضی

$$(٨) \dots \sqrt[n]{b-1} = 1, \sqrt[n]{b+1} = 1$$

چیلے کی تراش کا زہرہ جبکہ اسے محور لا پر عود دار ستوی سے کاٹا جائے ہوگا

$$(9) \dots\dots\dots \sqrt{r_N - r_B}, \Delta \pi r = \frac{r_B}{r} \pi - \frac{r_B}{r} \pi$$

۱۲۱ اور مطلوبہ حجم ہے $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pi^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pi^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pi^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pi^2} = \dots (10)$

دفعہ ۹۲ مثال ۵ کی رو سے۔

یہ حجم اس مسطوطانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کی تراش (۲) چمکے کی تراش کے مساوی ہو اور جس کا طول (۱۲) اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہو جو کوئی دائرہ کا مرکز نہ کرے۔

۱۰۸۔ بعض متعلق صورتیں۔ دفعہ ۱۰۶ کے عام ضابطہ (۲)

کی اور مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص مکانی نما

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{م}{ق} + \frac{ن}{پ} = ۱۲$$

کی تراش سٹوی (۱۱) = مستقل سے ایک ناقص ہے جس کے نیم محور ۲۱ پ (۱۲) اور

۲۱۲ \sqrt{pq} میں اور اس لئے اس کا رقبہ ۲۱۲ \sqrt{pq} ہے

اس لئے مستوی لا = ف' مجسم سے جو قطعہ کا ٹاپ اس کا حجم ہے

۲۱۲ \sqrt{pq} \int لا فر لا = ۲۱۲ \sqrt{pq} ف' (۲)

یہ اس اسطوانہ کے نصف حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع وہی ف ہو اور وہ اسی ناقصی قاعدہ پر قائم ہو۔

مثال ۲۔ ناقص نما $\frac{لا^2}{۱} + \frac{ما^2}{۲} + \frac{می^2}{۳} = ۱$ (۳)

میں مستوی لا = مستقل سے تراش ایک ناقص ہے جس کے نیم محوریں

ب $\sqrt{۱ - \frac{لا^2}{۱}}$ اور ج $\sqrt{۱ - \frac{لا^2}{۲}}$ (۴)

اور جس کا رقبہ ہے

۲۱۲ ب ج (۱ - $\frac{لا^2}{۲}$) (۵)

کسی دو مستویوں کے درمیان کے حصہ کا حجم جبکہ یہ مستوی محور لا پر عمود وار ہوں یہ ہے

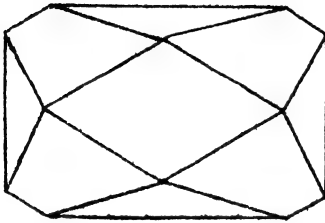
۲۱۲ ب ج \int (۱ - $\frac{لا^2}{۲}$) فر لا (۶)

جسے لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ کل حجم کے لئے لا کے حدود ± ۱ ہیں اور کل حجم ہے $\frac{۲}{۳} \pi$ ۱ ب ج۔

۱۰۹۔ سمپسن کا قاعدہ۔ اوپر کے اکثر نتائج دراصل ایک عام

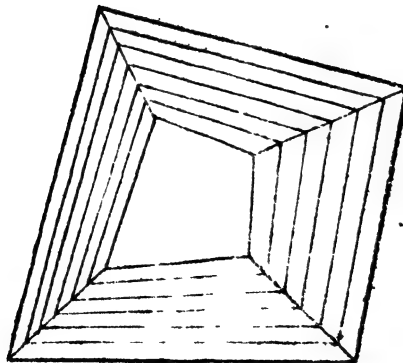
ضابطہ میں شامل ہیں جو ایسی تمام صورتوں میں لگ سکتا ہے جہاں محور لا پر عمود وار مستوی تراش کا رقبہ لا کا دوسرے درجہ کا تفاعل ہو۔ ایسی صورت میں دو متوازی مستویوں کے درمیان کا حجم، محض ان تراش

احاطہ کرنے والی تراشیں صدری محور پر عمود وار ہوں۔ جو طالب علم درجہ دوم کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے وہ آسانی سے دیکھ لے گا کہ یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے ایسے مجسم کی صورت بھی موجودہ قاعدہ کے تحت آتی ہے جہاں مجسم



شکل (۶۲)

دو متوازی مستوی کشیداری
رخون اور اطراف میں مستوی
رخوں سے جو شملت ہوں
یا منحرف گھرا ہوا ہو۔ اس میں
ہم وہ صورت بھی شامل کر سکتے
ہیں جہاں بعض یا سب طرفی پہلو
ایسی منحنی سطحیں ہوں (زائدی
مستافی نما) جن کی نگویں خطوط
مستقیم سے ہوتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے مستویوں کے متوازی حرکت کرتے
ہیں اور جن میں سے ہر ایک خط دو ایسے خطوط متقوم کو قطع کرتا ہے جن میں سے
ہر ایک ایک کثیر الاضلاع کے ایک دائرہ کو دوسرے کثیر الاضلاع کے ایک دائرہ سے
ساتھ ملتا ہے۔



شکل (۶۳)

اور چونکہ ہر کثیر الاضلاعی رخ میں اضلاع کی تعداد لا انتہا بڑھائی جاسکتی ہے یہ قاعدہ اُس مجسم کی صورت میں بھی لگایا جودوستوی متوازی رخوں سے اور ایک ایسی منحنی سطح سے گھرا ہوا ہو جو ایک خط مستقیم کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے اور یہ خط ہمیشہ ان رخوں کے محیطوں سے ملتا ہے۔

مثال ۱۔ نامکمل قائم مستدیر مخروط کا حجم دریافت کرو۔
فرض کرو کہ مستوی سروں کے نصف قطر 'ا' ہے اور وسطی تراش کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ('ا' + 'ب') ہے۔ پس

$$س_۱ = \pi ر_۱^۲ = \pi ('ا' + 'ب')^۲ = س_۲ = \pi ر_۲^۲$$

اس لئے حجم ہے $\frac{1}{3} \pi ر_۱^۲ ('ا' + 'ا' + 'ا' + 'ب' + 'ب' + 'ب') \dots \dots (۶)$
جہاں نامکمل کا ارتفاع 'ف' ہے۔

مثال ۲۔ نصف قطر 'ا' کے مجسم کرہ میں نصف قطر 'ب' کا ایک اسطوانی سوراخ مرکز میں سے برمایا گیا ہے۔ باقی ماندہ حجم دریافت کرو۔

یہاں $س_۱ = س_۲ = \pi ر_۱^۲ = \pi ('ا' - 'ب')^۲ = س_۳ =$
اسلئے وسط تراش $\frac{2}{3} \pi ('ا' - 'ب')^۲$ ہے۔ سوراخ کا طول $۲ | 'ا' - 'ب' |$ ہے۔ مطلوبہ حجم اس لئے ہے $\frac{2}{3} \pi ('ا' - 'ب')^۲ \dots \dots (۷)$

۱۱۔ منحنی خطوط کا طول معلوم کرنا۔ مستقیم الاضلاع شکل کا محیط

وہ طول ہے جو شکل کے مختلف اضلاع کے مساوی طول لیکر ان کو ترتیب وار ایک ہی خط مستقیم میں سروں پر سرے لکھنے سے حاصل ہو۔
چونکہ منحنی خط خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو خط مستقیم کے کسی حصہ پر یوں منطبق نہیں کیا جاسکتا، اس لئے اس امر کی تعریف مطلوب ہے کہ ایک منحنی کے "طول" سے کیا مراد ہے۔ عام طور پر یہ تعریف اختیار کی جاتی ہے کہ یہ طول ان

بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا ہے جبکہ اضلاع کا طول لا انتہا کم ہو جائے۔
 یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ سوائے شاید تنہا نقطوں کے منحنی کا ڈھال مسلسل ہے یعنی کسی
 دو متصل نقطوں پ اور ق کے ماسوں کا باہمی میلان 'ق کو پ
 کے کافی قریب لانے سے آنا کم کیا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ یہ معلوم ہو گا کہ تمام
 قیود کے ماتحت مذکورہ بالا انتہا یگانہ ہے نیز یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ انتہا باہر
 بنے ہوئے کثیر الاضلاع کی متناظر انتہا کے مساوی ہے۔
 اگر منحنی کے دو متصل نقطوں پ اور ق کے کارٹیزیائی محدد (لا، ما) اور

(لا، مفا) + (ما، مفا) ہوں تو وتر پ ق کا طول ہے $\sqrt{(مفا - لا)^2 + (مفا - ما)^2}$

دفعہ ۲ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ما اور فرما محدود اور مسلسل ہوں تو نسبت

مفا، پ اور ق کے درمیان منحنی کے کسی ایک نقطہ کے لئے مشتق
 مفا، لا
 تفاعل فرما کی قیمت کے مساوی ہے۔ اسلئے فرما کی مناسب قیمت منتخب کرتے

$$پ ق = \sqrt{1 + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2} مفا لا$$

اخذ ہے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہائی قیمت اس لئے یہ ہے

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2} فرلا \dots \dots \dots (۱)$$

جبکہ اس تکمیل کو لا کے مناسب محدود کے درمیان لیا جائے۔ اس امر کو کہ یہ انتہائی
 قیمت یگانہ ہے دفعہ ۹۰ میں ثابت کیا گیا ہے۔
 اگر لا کو ما کا تفاعل خیال کیا جائے تو متناظر ضابطہ ہو گا

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرما}\right)^2} فرما \dots \dots \dots (۲)$$

۲۵۰۔ منحنی کی قوس کو ms سے تعبیر کرو جبکہ قوس کو ایک اختیاری نقطہ (لا) سے ناپنا شروع کیا گیا ہے اور دفعہ ۶۰ کی مانند رکھو $\frac{فرلا}{فرلا} = ms$ چہا تو $\frac{فرلا}{فرلا}$ ہو جاتا ہے

(۳) $ms = \int \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)^2} \cdot فرلا$
ضابطہ (۲) کے لئے مائل استعمال ہو جود ہے۔

مثال ۱۔ زنجیر $ما = ج$ جنہ $\frac{لا}{ج}$ (۴)
میں $\int \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)^2} \cdot فرلا = \int \sqrt{1 + ج^2} \cdot فرلا$

$= \int ج$ جنہ $\frac{لا}{ج} = فرلا = ج$ جنہ $\frac{لا}{ج}$
چونکہ یہ لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے اس لئے سب سے پہلے نقطہ سے اگر ms کو ناپا جائے تو

(۵) $ms = ج$ جنہ $\frac{لا}{ج}$
مثال ۲۔ مکانی $ما = ۴$ لا (۶)

میں $\int \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)^2} \cdot فرلا = \int \sqrt{1 + \frac{لا + لا}{لا}} \cdot فرلا$ (۷)
شمار کنندہ کو پہلے منطبق بنانے سے، دفعہ ۶ کے طریقہ سے اسے مکمل کیا جاسکتا ہے۔
رکھ لا = ۱ جنہ ۴، اس طرح مائل ہوتا ہے

۱۲ $\int ج$ جنہ ۴ فرہ = ۱ $\int (۱ + ج^۲)$ جنہ ۲ فرہ = ۱ $\int (۱ + ۶ + \frac{۱}{۶} ج^۲)$ جنہ ۶ (۸)
چونکہ لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے اس سے قوس کا طول ملتے جبکہ قوس کے ms سے ملتا ہے۔

دفعہ سابق کے (۳) کو بلحاظ مکمل کی اوپر کی مد (لا) کے تفریق کرنے سے اس کی
بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ہا} = \frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}} = \text{قط پہا} \dots\dots\dots (۴)$$

چونکہ جب 'ق کو پ کے لا انتہا قریب لایا جاتا ہے تو ر پ ق کی
مف لا کے ساتھ جو نسبت ہے اس کی انتہائی قیمت قط پہا ہے اسلئے آہٹا میں

$$\text{ہا} = \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}} = ۱ \dots\dots\dots (۵)$$

اوپر کے اصول سے کئی ضروری ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ سب سے پہلے اگر
نغنی کے کسی نقطہ پ کے محدد لا، فاقوس میں کے تفاعل خیال کئے جائیں تو
شکل ۱۹ دفعہ ۲۴ کے بموجب

$$\text{جم ق پ ر} = \frac{\text{پ ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف لا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{جب ق پ ر} = \frac{\text{ق ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف فا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{اس لئے جم پہا} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}} \text{، جب پہا} = \frac{\text{فر فا}}{\text{فر س}} \dots\dots\dots (۶)$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}} \right) + \left(\frac{\text{فر فا}}{\text{فر س}} \right) = ۱ \dots\dots\dots (۷)$$

نیز اگر لا، فاقوس اور تغیرت کے تفاعل ہوں تو

$$\text{پ ق} = \left[\left(\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}} \right) + \left(\frac{\text{مف فا}}{\text{مف ت}} \right) \right] \times \text{مف ت}$$

$$\text{اس لئے ہا} = \frac{\text{پ ق}}{\text{مف ت}} = \left[\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \right) + \left(\frac{\text{فر فا}}{\text{فر ت}} \right) \right]$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2} \dots\dots\dots (۸)$$

$$\text{اس لئے س} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2} \dots\dots\dots (۹)$$

اسے دفعہ ۱۱۰ (۱) کی تعمیم خیال کیا جاسکتا ہے۔ وہ ضابطہ اس مفروضہ کی بنا پر حاصل کیا گیا تھا کہ قوس زیر بحث کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی صرف ایک قیمت ہے۔ نتیجہ (۹) اس قید سے آزاد ہے۔ صرف اتنا ضروری ہے کہ جیسے تاثر ہے نقطہ پ منحنی کو مسلسل طور پر متسم کرے۔

اسی طرح ضابطہ (۶) کسی قابل تخطیط منحنی کا طول معلوم کرنے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ چہا سے وہ زاویہ مراد لیا جائے جو س کے بڑھنے کی سمت میں کیچنچا ہوا اس محور کا کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے۔

صریحاً ضابطوں (۸) اور (۹) کی علم حرکت میں تعمیر بن مل سکتی ہیں۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے کارٹیشی محدودوں لا، ما کو وقت تا کے تغا عل خیال کیا جائے تو

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}، \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \text{ محدودوں کے محوروں کی سمت میں ترکیبی رفتاریں ہیں اور اگر ع حقیقی رفتار ہو تو}$$

$$= ۶ = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2} \dots\dots\dots (۱۰)$$

ضابطے (۸) اور (۹) اس طرح ذیل کے ضابطوں کے معادل ہیں

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = ۶، \text{ س} = \sqrt{۶ \text{ فرت}} \dots\dots\dots (۱۱)$$

مثال۔ قطع ناقص لا = ا جب فما، ما = ب جم فما..... (۱۲)

$$\text{میں } \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فر فما}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فر فما}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فر فما}}\right)^2 = \text{ا}^2 \text{ جم فما} + \text{ب}^2 \text{ جب فما}$$

= لا (۱- ز) جب فما جہاں ز خروج المکرز ہے۔

پس اگر قوس کو محور اصغر کے سرے سے ناپا جائے تو قوس

$$س = 1 \int_0^{\pi} 1 - ز^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{فرما} \dots \dots \dots (13)$$

یہ تکملہ ریاضی کے معمولی تغا علون کی رقوم میں (محدود صورت میں) نہیں بیان ہو سکتا۔ اسے ”دوسری قسم کا ناقصی تکملہ“ کہا جاتا ہے اسے ہم $n (z, \phi)$ [E (e, \phi)] سے تعبیر کریں گے۔ یہ ایک معلومہ تغا عل خیال کیا جاسکتا ہے لیشراند نے اسکی جدولیں مرتب کی ہیں۔ اس لئے ناقص کا کل محیط اس طرح بیان ہو سکتا ہے

$$12 \int_0^{\pi} 1 - ز^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{فرما} \dots \dots \dots (14)$$

اس جملہ کے تکملہ کو اس طرح $n (z, \phi)$ بیان کیا جائیگا یا زیادہ اختصار کے طور پر $n (z)$ سے۔ یہ دوسری قسم کا ”پورا ناقصی تکملہ“ کہلاتا ہے۔ مقدار ز تکملہ کا ”مقیاس“ کہلاتی ہے۔

سلیسلوں کے ذریعہ تکملہ (14) کی قیمت معلوم کریں گے متعلق دیکھو دفعہ ۱۸۰۔

۱۱۲۔ قطبی محدودوں کے لحاظ سے قوسیں۔

فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نیم قطروں، $و پ$ ہیں اور $پ ن$ ، $و پ$ پر عمود کھینچا گیا ہے لہذا

$$و پ = ر، و پ = ر + م ف ر، و پ = م ف ط$$

تب دفعہ ۶۳ کے بموجب $پ ن$ تفاوت ہوگا $ر م ف ط$ سے اور $ن پ$

تفاوت ہوگا $م ف ر$ سے بقدر ایسی مقداروں کے جو بالترتیب $پ ن$ ، $ن پ$ کے متقابلہ میں لا انتہا چھوٹی ہوں گی۔ اسلئے $پ پ$ یا $پ ن + ن پ$

Traite des Fonctions Elliptiques (1826)

‡

$$+ \text{”پہلی قسم“ کا ناقصی تکملہ ہے} \int_0^{\pi} 1 - ز^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{فرما} \quad \text{اور اسے ہم}$$

ق (ز، ϕ) [F (e, \phi)] سے تعبیر کریں گے۔ متناظر ”پورا“ تکملہ

[جکی اوپرکی حد $\frac{\pi}{2}$ ہے] ق، (ز) سے تعبیر ہوگا۔

انتہائیں $\left[\text{ر}^2 (\text{مف طما})^2 + (\text{مف ر})^2 \right]$ کے ساتھ مساوات کی نسبت رکھیں۔
اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر طما متبوع متغیر ہو تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرطما}} = \text{نہا} \frac{\text{پ پ}}{\text{مف طما}} = \left[\text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فرطما}} \right)^2 \right]^{1/2} \dots (۱)$$

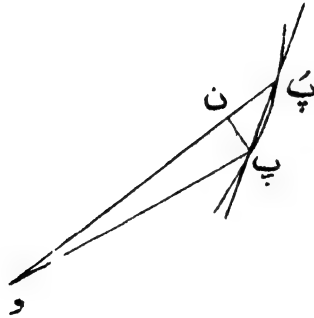
$$\text{اور اس لئے} \quad \text{س} = \left[\text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فرطما}} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ فرطما} \dots (۲)$$

بشرطیکہ تکملہ کو طما کے مناسب حدود کے اندر لیا جائے۔
اگر ر اور طما متغیر متبوعات کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{نہا} \frac{\text{پ پ}}{\text{مف فرت}} = \left[\left(\frac{\text{فرت ر}}{\text{فرت}} \right)^2 + \left(\frac{\text{فر فرت}}{\text{فرت}} \right)^2 \right]^{1/2} \dots (۳)$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{س} = \left[\left(\frac{\text{فرت ر}}{\text{فرت}} \right)^2 + \left(\frac{\text{فر فرت}}{\text{فرت}} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ فرت} \dots (۴)$$

جس میں (۲) بلور خاص صورت کے شامل ہے۔



شکل (۶۴)

اگر ر طما کو قوس س کے تفاعل خیال کیا جائے اور فنا سے وہ زاویہ
مراد ہو جو منحنی کا مماس جسے س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے سمتی نیم قطر
کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے تو

$$\text{جم ن پ پ} = \frac{\text{ن پ}}{\text{پ پ}}, \text{جب ن پ پ} = \frac{\text{پ ن}}{\text{پ پ}}$$

اس لئے انتہائیں $\text{جم ف د} = \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}}$ ، $\text{جب ف د} = \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}}$ (۵)

ان نتائج کی حرکیاتی توضیح ہو سکتی ہے۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع سے تعبیر ہو تو سمتی نیم قطر کی سمت میں اور اس کے علی القوائم رفتاریں بالترتیب ہوں گی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم ف د} = \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}} = \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}} \\ \text{جب ف د} = \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}} = \frac{\text{ف د}}{\text{ف د}} \end{array} \right. \text{..... (۶)}$$

اور ضابطہ (۴) پہلے کی طرح اس کے معادل ہے

$$\text{س} = \text{ل} \times \text{ف د} \text{..... (۷)}$$

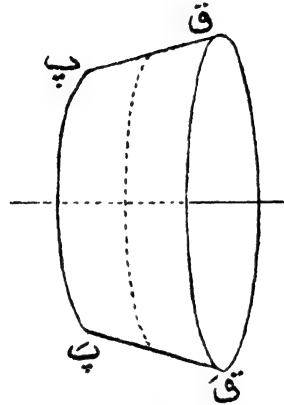
۱۱۳۔ گردشیں سطحوں کے رقبے۔ منحنی سطح کے رقبہ کی عام تعریف

مرب کرنا اور پھر یہ ثابت کرنا کہ اس رقبہ کی ایک معین قیمت ہے یہ امور ایک حد تک نفاذیت طلب ہیں۔ اس جگہ ہم ایسی گردشیں سطح کو بحث میں لائیں گے جو محور علی القوائم ۲۵۵ مستوی سطحوں سے محدود ہو (محدود ہونا ضروری نہیں)۔

دائری اسطوانے سے ہم شروع کرتے ہیں۔ اسکی منحنی سطح کی یہ تعریف ہو سکتی ہے کہ یہ اندر بنے ہوئے منشور کے طرفی رخوں کے رقبوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے۔ ان سب رخوں کا ایک ہی طول ہے اور ان کا مجموعہ اس مشترک طول اور منشور کی چوڑی تراش کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ انتہائیں یہ محیط اسطوانہ کا محیط ہو جاتا ہے۔ اس لئے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح جس کا نیم قطر r اور ارتفاع h ہو $\pi r h$ ہے۔

اس کے بعد مخروط کی سطح کو جو محور پر عمود دار دو مستویوں کے درمیان گھری ہوئی ہے۔

اس کے اندر ناقص مخروط مضلع بنایا جاسکتا ہے جس کے قاعدے متشابه اور متشابه الوضع منتظم کثیر الاضلاع ہیں جو احاطہ کرنے والے دو دائروں کے اندر بنائے گئے ہیں زیر بحث منحنی سطح اس ناقص مخروط مضلع کے طرفی رقبہ کی انتہا خیال کیجا سکتی ہے



شکل (۶۵)

یہ رقبہ منحنیوں کی ایک تعداد پر مشتمل ہے جن سب کا ارتفاع مشترک ہے یعنی ان کے متوازی اضلاع کے درمیان عمودی فاصلہ۔ اس لئے یہ رقبہ اس مشترک ارتفاع اور ان دو کثیر الاضلاعوں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ انتہا میں یہ محیط حائل دائروں کے محیط بن جاتے ہیں اور یہ مشترک ارتفاع دائروں سے گھرے ہوئے مخروط کا مکون خط بن جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں خط مستقیم پ ق کے ایک ایسے محور کے گرد گھومنے سے جو اس کی مستوی میں واقع ہے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ پ ق اور پ اور ق کے مرتمہ دائروں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اور یہ وہی بات ہے کہ یہ رقبہ پ ق اور اس کے وسطی نقطہ کے مرتمہ دائرہ کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

اس کے بعد درجہ سطح کو جو منحنی $\text{ما} = \text{فما} (لا) \dots \dots (۱)$

کی توں غور لا کے گرد گردش کرنے سے پیدا کرتی ہے۔ اس قوس میں نقطوں کی کوئی تعداد لو اور انکو سیدھے خطوں سے ملا کر ایک کھلا کثیر الاضلاع حاصل کر دینی سطح کی یہ تعریف اختیار کر لی جاتی ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے جو رقبے مرتب ہوتے ہیں ان کے مجموعہ کی یہ انتہائی قیمت ہے جبکہ اضلاع کے طول کو لا انتہا کم کیا جائے اس لئے اگر کمون منحنی کے کسی عنصر صف میں کا وتر پ ق ہو اور پ ق کے وسطی نقطہ کا معین ما ہو تو منحنی سطح مجموعہ $\pi \times 2$ پ ق کی انتہائی قیمت ہوگی۔ انتہائی پ ق صف میں کے ساتھ نسبت مساوات رکھتا ہے اور ما کو منحنی کا معین خیال کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح سطح $\pi \times 2$ (ما \times صف میں) کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوتی یعنی سطح ہے

$$\pi \times 2 \text{ مافر میں} \dots \dots \dots (۲)$$

جبکہ مکملہ کوں کی مناسب وسعت پرا لیا گیا ہے۔

مثال ۱۔ کردہ کی صورت میں کمون منحنی کے کسی نقطہ کے بعد میں

$$(۱) = \text{اجم طہ} \text{ ما} = \text{اجب طہ} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{جس سے} \dots \dots \dots \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = ۱ \dots \dots \dots (۴)$$

پس منطقہ کی سطح جو غور لا پر عمودوار استویوں سے گھرا ہوا ہو یہ ہوگی

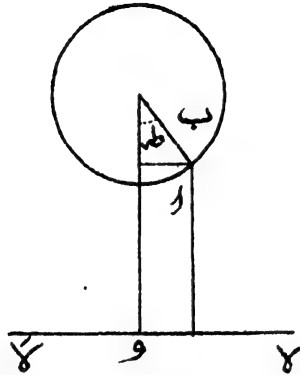
$$\pi \times 2 \text{ اجم طہ فرطہ} = \pi \times 2 \text{ اجم طہ جم طہ} = \pi \times 2 \text{ (ا-لا) ... (۵)}$$

جہاں لائے احاطہ کرنوالے دائروں سے متعلق ہیں۔ اس لئے کہہ کا منطقہ رقبہ میں اس سطح اسطوانہ کے متناظر منطقہ کے مساوی ہے جس کا محور احاطہ کرنے والے دائروں کے استویوں پر عمودوار ہے۔ خاص صورت میں کہہ کی کل سطح $\pi \times 2 = ۱ \times ۲ \times ۱ = \pi \times 2$

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نیم قطر ب ہے۔ اس کی سطح میں ایک خط مستقیم ہے جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ۱ ہے۔ دائرہ کو اس خط کے گرد پھرانے سے جو چہلہ حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دیوانہ کرد۔

$$\text{یہاں} \dots \dots \dots \text{ا-ب جم طہ} \text{ ما} = ۱ - \text{ب جم طہ} \text{ فرس} = \text{ب ... (۶)}$$

پس π^2 کا فرس = π^2 ب (۱۔ ب جم طہ) فرطہ (۷)



شکل (۶۶)

طہ کے حدود ہیں۔ اور π^2 اسطرح حاصل ہوتی ہے π^2 ب \times π^2 ا جو ب
تقر کے قائم اسطوانہ کی مشنئی سطح کے مساوی ہے جس کا طول (۱ π^2 ا) ہو اور یہ طول
اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہے جو کمون دائرہ کا مرکز مرسم کرتا ہے۔

۲۵۷

مثال ۳۔ ناقص لا = ا جب فدا = ب جم فدا کو محور اعظم کے
گرد پھرنے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

$$\pi^2 \text{ کا فرس} = \pi^2 \text{ ا} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$$

$$\pi^2 \text{ ا} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \pi^2 \text{ ا} - \text{ا} \times \text{ز جب فدا} \text{ فر (جب فدا) } \dots (۹)$$

دفعہ ۱۱ کی رو سے۔ اب رکھو ز جب فدا = جب طہ (۱۰)

$$\text{پس تکرار (۹) = } \frac{\pi^2 \text{ ا} \times \text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \frac{\pi^2 \text{ ا} \times \text{ز (جب طہ + جب طہ جم طہ)}}{\text{فرطہ}} \dots (۱۱)$$

..... (۱۱)

کل سطح دریافت کرنیکے لئے اسے فدا = $\frac{\pi}{4}$ کے درمیان یا

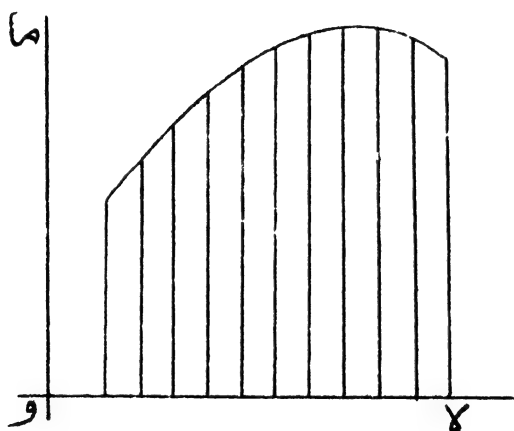
ہوں تو منحرفوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2} (ما_1 + ما_2) + \frac{1}{2} (ما_2 + ما_3) + \dots + \frac{1}{2} (ما_{n-1} + ما_n) + \frac{1}{2} (ما_n + ما_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2} (ما_1 + ما_2 + ما_3 + \dots + ما_n + ما_{n+1}) \dots (۱)$$

یعنی پہلے اور آخری معین کے اوسط حسابی میں درمیانی معینوں کا مجموعہ جمع کرو اور

نتیجہ کو مشترک وقفہ سے ضرب دو۔
اس طرح سے جو قیمت حاصل ہوگی وہ صریحاً اصلی رقبہ سے زیادہ ہوگی
اگر منفی محور کا ۱ کی جانب محذب ہو اور کم ہوگی اگر منقعر ہو۔



شکل (۶۰)

ایک اور طریقہ جو ابتدا میں نیوٹن اور کوٹس نے دیا وہ یہ ہے کہ ما کے لئے
(ن-۱) دیں درجہ کا منطق تکمیلی جملہ اختیار کیا جائے یعنی

$$\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \dots (1)$$

مائل ہوتی ہے جبکہ n لا انتہائی بڑھتا ہے اس کو تفاعل کی ”اوسط قیمت“ کہتے ہیں سعت (ب-۱) پر۔

$$\text{چونکہ } h = \frac{1}{n} \text{ 'جلد (۱) اس طرح لکھا جاسکتا ہے}$$

$$p_1 h + p_2 h + \dots + p_n h$$

$$\text{ب-۱}$$

اور اسکی انتہائی قیمت جبکہ $n \rightarrow \infty$ ' $h \rightarrow 0$ یہ ہے

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$$

$$\text{ب-۱} \dots (2)$$

ہندسی تعبیر کے موافق اوسط قیمت اس مستطیل کا ارتفاع ہے جس کا قاعدہ
ب-۱ ہے اور جس کا رقبہ اس رقبہ کے مساوی ہے جو معنی $p_1 h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$
اطراف کے معینوں اور محور کا سے گھرا ہوا ہو۔ دیکھو شکل ۴۹ دفعہ ۹۱۔
دفعہ ۹۱ (۳) کا سلسلہ اب یوں بیان ہو سکتا ہے۔ متغیر متبوع کی کسی وسعت پر
ایک مسلسل تفاعل کی اوسط قیمت، اسی سعت کے اندر متغیر متبوع کی ایک ایک
قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت کے مساوی ہے۔

دفعہ ۱۱۴ کے مختلف ضابطوں کی اب یہ تعبیر ہو سکتی ہے کہ ان سے ایک معلوم
سعت میں تفاعل کی اوسط قیمت کے لئے تقریبی حلقے تفاعل کی ایسی قیمتوں کے
سلسلہ کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں جو سعت بھی ہیں متساوی الفضل و فصول پر لگائی
ہیں۔ مثلاً تین یا چار ایسی قیمتوں کی رقوم میں اوسط قیمتیں کو لکھنے کے طریقہ سے
بالترتیب یہ معلوم ہوتی ہیں

$$\frac{1}{4} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad \frac{1}{8} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8)$$

$$(۵) \dots\dots\dots \sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}$$

اس لئے مطلوبہ نسبت ہے

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{r}{r_0}} \quad \pi r_0 r = \frac{r}{\pi}$$

مثال ۳۔ اگر کہ کی کثافت θ مرکز سے فاصلہ r کا تعامل ہو تو حجم کا جزو
مفح = مف ($\frac{r}{\pi} - \frac{r_0}{\pi}$) = $\pi r_0 r$ مف r

اوسط کثافت ہے $\theta = \pi r_0 r \div \frac{r}{\pi} = \pi r_0$

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{3}{2} \theta = \pi r_0 r$$

اگر r بیرونی نصف قطر ہو۔
مثلاً اگر θ کثافت تو اوسط کثافت سطح پر کی کثافت کا $\frac{3}{2}$ ہے۔
نیچر تسلیم کرنے سے کہ زمین کے اندر

$$(۸) \dots\dots\dots \theta = \theta_0 (1 - \frac{r}{r_0})$$

حاصل ہوتا ہے

$$(۹) \dots\dots\dots \theta = \theta_0 (1 - \frac{r}{r_0}) = \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_1) \dots\dots\dots$$

جہاں θ سطح پر ($r = r_0$) کی کثافت ہے۔ اگر کثافت کا اوپر کا قانون زمین کی صورت میں لگ سکے تب چونکہ $\theta = \theta_0$ (تقریباً) ہیں حاصل ہوتا ہے
 $\theta = \frac{1}{2} \theta_0$ یا مرکز پر کی کثافت سطح پر کی کثافت کا $\frac{1}{2}$ گنا ہے۔

۱۱۶۔ ہندسی اشکال کے اوسط مرکز۔ ہندسی نقاط

$$(۱) \dots\dots\dots (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)$$

کے نظام کے اوسط مرکز (ط) کی یہ تعریف ہو سکتی ہے کہ یہ وہ نقطہ ہے جس کے متعلق

$$(۲) \quad \begin{cases} \frac{1}{\bar{a}} = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ \frac{1}{\bar{a}} = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{cases}$$

چونکہ یہ ارتباط خطی ہیں اور کارٹیزی محدودوں کے استحصائے خطی ضابطوں سے عمل میں لائے جاتے ہیں اس لئے یہ آسانی معلوم ہوتا ہے کہ کسی خط سے ط کا فاصلہ اسی خط سے دئے ہوئے نقطوں کے فاصلوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہے۔ البتہ ان فاصلوں کو مناسب علامتوں کے ساتھ لیا جائے ہو جب اس کے کہ یہ خط کے ایک جانب واقع ہوں یا دوسری جانب۔ اسی طریقہ سے، ایک مستوی تختی کا یا مستوی رقبہ کا ایک اوسط مرکز ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس مستوی میں کسی خط سے تختی یا رقبہ کے صفاری اجزاء کے فاصلوں کے اوسط (ذمہ ۱۵ کے معنی میں) کے مساوی ہوتا ہے۔ پس تختی کے لئے

$$(۳) \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \frac{\sum a_i}{\sum 1} \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \frac{\sum a_i}{\sum 1}$$

اور رقبہ کی صورت میں

$$(۴) \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \frac{\sum a_i}{\sum 1} \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \frac{\sum a_i}{\sum 1}$$

جہاں صف ق رقبہ کا جزو یا عنصر ہے۔ انتہا میں یہ مجموعہ تکملوں کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔

مثال ۱۔ دائری قوس کی صورت میں، اگر مبدأ کو مرکز، محور کا کو وسطی خط پر لیا جائے تو $\bar{a} = \frac{1}{n} \frac{\sum a_i}{\sum 1}$ لکھو لا = حجم طما صف س = و صف طما، اس طرح

$$(۵) \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \frac{\sum a_i}{\sum 1} \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \frac{\sum a_i}{\sum 1}$$

اگر ۲ عم وہ زاویہ ہو جو کل قوس کے سامنے مرکز پر پڑتا ہے۔

جیسے عہد بڑھتا ہے اتنا ہی چھوٹی قیمت سے بیکند لا گھٹتا ہے اسے مقرر تک -

$$\text{نصف دائرہ کے لئے عہد} = \frac{\pi}{4} \text{ اور لا} = \frac{\pi}{11} \text{ لہذا } 1.0632 = 1.0632$$

مثال ۲۔ مکانی ما' = ۴ لا لا (۶)
کے قطعہ کے رقبہ کے لئے جو دوہرے معین لا = ف سے گھرا ہوا ہو

$$\text{لا} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} \text{ (۷)}$$

اوسط مرکز کے تخیل کی سرکایتیں ابعادی شکلوں کی صورت میں کی جاسکتی ہیں،
لیکن یہاں خط سے فاصلوں کی بجائے سطح مستوی سے فاصلے لئے جانے چاہئیں۔

مثلاً سطح تختی کی صورت میں

$$\text{لا} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} \text{ (۸)}$$

جہاں مف س سطح کا جزو ہے۔ اسی طرح حجم کے لئے

$$\text{لا} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} = \frac{\text{ف} \text{ لا مافر لا}}{\text{ف} \text{ لا مافر لا}} \text{ (۹)}$$

جہاں مف ح حجم کا جزو ہے۔

گردشی سطح یا مجسم کی صورت میں اوسط مرکز تشاکل کے محور پر ہوتا ہے، اگر اس کو
محور لا مانا جائے تو صرف لا کی قیمت محسوب کرنا باقی رہ جاتا ہے۔ اگر مکوں مغنی
کامین ما ہو تو (۸) میں رکھو مف س = ۲ ما مف س سطح کے طے نا
جزو کا رقبہ ہوگا جسکے سب نقطے مستوی لا = سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

اس لئے

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{\text{لا} \times \pi \text{ مافرس}}{\text{لا مافرس}} = \frac{\text{لا مافرس}}{\text{لا مافرس}}$$

اسی طرح (۹) میں رکھو مافرس = π مافرس لا تو حاصل ہوگا

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{\text{لا} \times \pi \text{ مافرس}}{\text{لا مافرس}} = \frac{\text{لا مافرس}}{\text{لا مافرس}}$$

مثال ۳۔ کروی سطح کے منقطع کے لئے رکھو

$$(۱۲) \dots\dots\dots \text{لا} = \text{لا} \times \text{مافرس} = \text{مافرس} \times \text{لا}$$

$$\text{تو لا} = \frac{\text{لا} \times \text{مافرس}}{\text{لا مافرس}} = \frac{\text{مافرس} \times \text{لا}}{\text{لا مافرس}}$$

$$(۱۳) \dots\dots\dots \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (\text{لا} + \text{لا})$$

اگر لا بہا زاویہ طما کے حدود ہوں اور لا حائط دائروں کے فصیلے ہوں۔
اس لئے منقطع کا اوسط مرکز محور پر حائط دائروں کے استویوں کے عین وسط میں واقع ہوتا ہے۔
مثلاً نیم کروی سطح کا اوسط مرکز عمودی نصف قطر کی تقصیف کرتا ہے۔

یہ نتائج گروہ اور لغافی اسطوانہ کے متناظر منطوقوں کے رقبوں کے مساوی ہونے سے حاصل ہو سکتے تھے (دفعہ ۱۱۳ مثال ۱)۔

مثال ۴۔ مجسم مستدیر مخروط کی صورت میں جبکہ مبدأ رأس پر ہو تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا پس

$$(۱۴) \dots\dots\dots \frac{\text{لا} \times \text{لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

اگر ف ارتفاع ہو۔

مثال ۵۔ ناقصی مکانی نما

$$(۱۵) \dots\dots\dots \frac{م^۲}{ب} + \frac{ی^۲}{ق} = ۲$$

کے قطعہ کے لئے جو لا = ف سے کتنا ہے چونکہ تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا اس لئے جیسا کہ دفعہ ۱۰۸ مثال میں

$$(۱۶) \dots\dots\dots \frac{ک^۲ (لا^۲ - لا^۲ فرلا)}{ف} = \frac{۲}{۳} \dots\dots\dots$$

مثال ۶ - نصف قطر کے نصف کرہ کے لئے رکھو ما = لا - لا^۲ اس طرح

$$(۱۷) \dots\dots\dots \frac{ک^۲ (لا^۲ - لا^۲ فرلا)}{ک^۲ (لا^۲ - لا^۲ فرلا)} = \frac{۳}{۸} \dots\dots\dots$$

اسی ضابطہ سے ناقص نما

$$(۱۸) \dots\dots\dots ۱ = \frac{ی^۲}{ج} + \frac{م^۲}{ب} + \frac{لا^۲}{ا}$$

کے اس نصف کے اوسط مرکز کا مقام معلوم ہوتا ہے جو مستوی مای کے دائیں جانب واقع ہے کیونکہ اس صورت میں ف (لا) ایسے بدلتا ہے جیسے لا - لا^۲ دیکھو دفعہ ۱۰۸ مثال ۲ -

۱۱۷ - پاپس (PAPUS) کے مسئلے -

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد گھومے مگر اسکو کائے نہیں تو سطح جو اس طرح پیدا ہوتی ہے وہ قوس کے طول اور اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔
فرض کرو کہ محور لا گھاؤ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اور کون منحنی کا معین ما ہے۔ دفعہ ۱۱۳ کی رو سے پوری گردش میں جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ ۲π ک ما فرس کے مساوی ہے جہاں تکملہ کل قوس پر لیا جائے۔

اگر قوس کا وسط مرکز مآ ہو تو مآ = $\frac{ل مافرس}{ل فرس}$ دفعہ ۱۱۶ کی رو سے۔

اس لئے $\pi ۲$ ل مافرس = $\pi ۲$ مآ \times ل فرس (۱)

جو مسئلہ مذکورہ ہے۔
(۲) اگر ایک مستوی رقبہ کو اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد پھرایا جائے جو اسے کاٹے نہیں تو حجم جو اس طرح پیدا ہوتا ہے وہ رقبہ اور اس کے اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ مف ق رقبہ کا عنصر ہے۔ پوری گردش میں جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے

ہذا $\pi ۲$ مآ \times مف ق
اگر رقبہ کی کمیت کا مرکز مآ ہو تو

مآ = ہذا $\frac{\pi ۲ مآ \times مف ق}{\pi ۲ مآ}$ دفعہ ۱۱۶ کی رو سے

اس لئے ہذا $\pi ۲$ مآ \times مف ق = $\pi ۲$ مآ \times ہذا مف ق (۲) ۲۶۶
جو مسئلہ مطلوبہ ہے۔*

گردشوں کو پورا خیال کیا گیا ہے لیکن صریحاً یہ قید ضروری نہیں۔
ان مسائل کے عکس مستوی قوس، مستوی رقبہ کے اوسط مرکز دریافت کر نیکے لئے استعمال ہو سکتے ہیں جبکہ ان کی گردش سے پیدا شدہ سطح اور حجم بلا واسطہ طریقہ پر معلوم ہوں۔ دیکھو مثال ۳ آ کے۔

* یہ سائل پیس کے رسالہ علم حیل میں موجود ہیں۔ پیس ششہائے مشہور ریاضی دانوں
تھا۔ نئے سرے سے گلڈن (Guilidinus) ان مائل کو بیال کیا۔ دیکھو

(De centro gravitatis (1635—1642).

(Ball, History of Mathematics)

مثال ۱۔ دائرہ نصف قطرب، اپنی سطح میں کے ایک خط کے گرد گھوم کر جھلا پیدا کرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کا فاصلہ خط سے ۱ ہے۔ سطح اور حجم دریافت کرو۔

$$\text{سطح ہے } \pi \times \pi \times 1 = \pi^2 \text{ ا ب}$$

حجم ہے $\pi \times \pi \times 1 = \pi^2$ ا ب۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰، مثال ۳ اور دفعہ ۱۱، مثال ۲ کے ساتھ۔

مثال ۲۔ مکانی ما = ۷ لا کا قطعہ جو دو ہرے معین لا = ف سے گھرا ہوا ہے اس معین کے گرد گھومتا ہے۔

اگر دو ہرے معین کا طول ۲ ک ہو تو قطعہ کا رقبہ $\frac{1}{2} \times 2 \times 7 = 7$ ف ک ہے (دفعہ ۱) اور اس کے اوسط مرکز کا فاصلہ معین سے $\frac{1}{2} \times 7 = 3.5$ ف ہے (دفعہ ۱۲، مثال ۲) اس لئے حجم جو پوری گردش سے پیدا ہوتا ہے یہ ہے

$$\frac{1}{2} \times 7 \times 7 = \frac{49}{2} \text{ ف ک}$$

مثال ۳۔ نیم دائری قوس جو اس کے سروں کے ملائیوئے قطر کے گرد گھومتی ہے اسکے لئے

$\pi \times \pi \times 2 = \pi^2 \times 2$ ' جس سے ما = $\frac{2}{\pi}$ لا نیم دائری رقبہ جو اپنے احاطہ کرنے والے قطر کے گرد گھومتا ہے اسکی صورت میں

$\frac{1}{2} \times \pi \times \pi \times 2 = \pi^2$ یعنی ما = $\frac{1}{2}$ ' اسی طرح کے حساب سے (کسی عمودی تراش کے) منشور یا اسطوانہ کے حجم کے لئے جو مستوی سروں سے گھرا ہوا ہو سادہ صاف شکل سکتا ہے۔

پہلے ہم یہ فرض کریں گے کہ ایک سر جسے قاعدہ کہا جائیگا طول پر عمود ہے۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا کوئی نقطہ پ ہے اور فرض کرو کہ معین پ پ کا طول ی ہے جہاں پ پ طول کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ مقابل کے سرے سے پ پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ مائل سرے کے مرکز کا معین تی ہے۔

اگر پ اور پ پر رقبہ کے متناظر اجزاء م ق اور م ق ہوں تو

$$\text{جی} = \text{نا} \times \frac{\text{جی مفق}}{\text{جی مفق}} = \text{نا} \times \frac{\text{جی مفق}}{\text{جی مفق}}$$

کیونکہ مفق، مفق کا قائم ظل ہے، اس لئے اٹنی باہمی نسبت مستقل ہے۔

اسلئے مجسم کا حجم = (جی × مفق) = جی × مفق ... (۳)

یعنی حجم قاعدہ کے قعر اور مقابل کے رقبہ کے اوسط مرکز کے معین کے حامل ضرب کے مساوی ہے۔

جس منشور یا اسطوانہ کے دونوں سرے مال ہوں اس کو دو ایسے منشوروں یا اسطوانوں کا مجموعہ یا فرق تصور کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا ایک سر طویل کے علی انقوائم ہو۔

اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام صورتوں میں حجم، چلیپی تراش اور دو سروں کے اوسط مرکوزوں کے درمیانی فاصلہ کے حامل ضرب کے مساوی ہے۔

مثال ۴۔ فائدہ کی شکل کے مجسم کا حجم جو ایک قائم مستدیر اسطوانہ سے قاعدہ کے مرکز میں سے گزرنے والے مستوی سے کاٹا جائے اور قاعدہ کی سطح کے ساتھ زاویہ عماد بنائے یہ ہے

$$\frac{1}{2} \pi \times \frac{4}{3} \times \text{اس عماد} = \frac{2}{3} \times \text{اس عماد متقابلہ کردہ نصفہ ۱۸} \times \text{مثال کے ساتھ}$$

پیس کے مسئلوں کی کوئی طرح سے تعمیم ہو سکتی ہے لیکن دوسرے مسئلوں کی حسب ذیل توسیع کا یہاں کر دینا کافی ہوگا۔

اگر کوئی 'مستوی رقبہ' جو مستقل ہو یا سلسلہ طور پر بدلنے والا، فضا میں کسی طور پر حرکت کرے لیکن اس طرح کہ مستوی کے متصل محل ایک دوسرے کو رقبہ کے اندر نہ قطع کریں تو حجم تلویں شدہ مساوی ہے

جس میں فرما ... (۴)

کے جہاں میں رقبہ ہے اور فرما ظل ہے مستوی پر کے عماد پر، رقبہ کے اوسط مرکز کے طریق (لوکس) کے چھوٹے جزو کا۔ اگر اس طے بنی کا جزو فرما ہو اور فرما

اور مستوی کے عماد کے درمیان زاویہ طما ہو تو یہ ضابطہ یوں لکھا جاسکتا ہے

۱) $\sin \theta = \frac{PM}{PM'} \dots \dots \dots (5)$
 یہ مسئلہ تین ابعادی جواب ہے مسئلہ دفعہ ۱۰۳ کا جو اس امر سے متعلق ہے کہ ایک
 متحرک خط اپنی حرکت میں کتنا رقبہ عبور کرتا ہے۔ مسئلہ زیر بحث اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ کا
 نتیجہ صریح ہے۔

۱۱۸ - ضعیفی تکملی - اس کتاب کی بحث زیادہ تر ایک متغیر کے تفاعلوں

۳۶۹

تک محدود ہے اور اس لئے جہاں تک تکملی احصا کا تعلق ہے یہ ایسے مسائل پر
 بحث کرتی ہے جو ایک متکمل پر منحصر ہیں یا ایک متکمل پر لا کے منحصر کئے جاسکتے ہیں
 لیکن ضعیفی تکملی مضمون کے طبعی استعمال میں ترقیم وغیرہ کے طور پر اس کثرت سے
 استعمال ہوتے ہیں کہ ان کے متعلق چند تشریحات کا یہاں دیدنا سودمند ہو گا۔ نظری
 امور پر صرف سرسری توجہ کی جائے گی۔ باضابطہ بحث کے لئے دفعہ ۹۰ کے طریقہ کی
 مناسب ترقیم کی جاسکتی ہے۔

فرض کرو کہ 'ی' متبوع متغیروں 'لا' 'ما' کا مسلسل اور وحید اقیمت تفاعل ہے

ی = ف (لا، ما) (۱)

اسکی ہندسی تعبیر یہ ہو سکتی ہے کہ یہ ایک سطح کی مسافات ہے (دفعہ ۳۴)۔ حوالہ
 کے مستوی 'لا' 'ما' میں کوئی محدود طبقہ 'س' اور فرض کرو کہ ایک اسطوانی سطح ایک خط
 مستقیم کے ذریعہ پیدا کی جاتی ہے جو ہمیشہ 'س' کے محیط سے ملتا ہے اور 'ی' کے محور
 متوازی رہتا ہے۔ اس حجم 'ح' پر غور کرو جو اس اسطوانہ 'مستوی' 'لا' 'ما' اور سطح (۱)
 کے درمیان گھرا ہے۔ دیکھو شکل ۶۸ صفحہ ۳۶۹۔

اگر طبقہ 'س' کو رقبہ کے اجزاء 'مف' 'مف' 'مف' 'مف'
 میں تقسیم کیا جائے اور ان اجزاء کے اندر کسی اختیاری نقطوں سے چھپے ہوئے

سطح (۱) کے معین 'ی' 'ی' 'ی' ہوں تو محوروں کو علی التوائم فرض

کر کے مجموعہ 'ی' 'مف' 'ی' 'مف' 'ی' 'مف' (۲)

سے تعبیر ہو سکیگا جہاں \int دوبار آتا ہے کیونکہ مجموعہ دو ابعاد میں لیا جاتا ہے۔
اس مجموعہ کی انتہائی قیمت ذیل کی علامت سے تعبیر ہوگی۔

$$\int \int f(x,y) dx dy \quad (۴) \quad \dots \dots \dots$$

اور حجم کے لئے ضابطہ ہوگا $\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy$ (۵).....
بائیں جانب کا جملہ ”دوہرہ تکملہ“ کہلاتا ہے۔ اسکی قیمت کی تعیین نہیں ہو سکتی جب
کہ تغیروں (لا، ما) کی وسعت جسکی طرف کے محیط سے حد بندی ہوتی ہے، تعیین
نہ ہو سکے۔

حجم \int ایک اور طرح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر $f(x,y)$ سطح
کی ایک تراش کا رقبہ ہو جو ماحی کے متوازی ایک مستوی سے کٹی ہے جس کا
فصلہ لا ہے تو دفعہ ۲۔۱ کی رو سے

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۶) \quad \dots \dots \dots$$

جہاں رقبہ \int سے متعلق لا کے حدود درج ہیں۔ لیکن دفعہ ۱۰
کی رو سے

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۷) \quad \dots \dots \dots$$

جہاں \int بہ تراش \int (لا) میں ماحی کے حدود ہیں جو بالعموم لا کے
تفاعل ہونگے۔ اس لئے

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۸) \quad \dots \dots \dots$$

یا جیسے اسکو بالعموم لکھا جاتا ہے۔

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۹) \quad \dots \dots \dots$$

+ چلا تکملہ فرلا سے متعلق ہے اور دوسرا فرنا سے۔ اس امر کے متعلق کوئی پورے طہ پر
یہاں قرار داد نہیں ہے۔

۲۷۱ اگر دونوں تکراروں کے حدود مستقل ہوں یعنی اگر طبقہ میں ایک مستطیل کی شکل کا ہو جس کے اضلاع محاور لا اور ما کے متوازی ہیں تو حجم اس طور پر بھی بیان ہو سکتا ہے

فَ { فَ (لا، ما) فَرَا } فَرَا (۱۰)

اور یہ کہا جاسکتا ہے کہ

فَإِنْ فَعَلْنَا (لَا، مَا) فَلَا فَرَا = فَفَعَلْنَا (لَا، مَا) فَلَا فَرَا... (١١)

اس کی توجہ شکل ۳۲ دفعہ ۳ سے ہوتی ہے۔ اور صورتوں میں جب تکمیل کی توجہ کو بدلا جائے تو مختلف تکملوں کے حدود کی توہم ضروری ہوتی ہے۔

مثلاً ایک ستوی پترے کی حکمت نکالنے میں جس کے کسی ایک نقطہ (لا، ما، پر) کا کثافت معلوم ہو، نیز کئی اور طبعی سوالات میں یہی اصول شامل ہوتے ہیں۔

رقبہ میں کسی کی تحلیل کے لئے ایک اور طریقہ سود مند ہوتا ہے مستوی لافانیں
 قطبی محدود (رطبہ) لو۔ رقبہ میں کو مستطیل نما اجزائیں ہم مرکز دائروں اور
 نیم قطروں کے ذریعہ تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسے کسی ایک جزو کا رقبہ
 و صف طہ صف رکے اگر دو متغی اضلاع کے نیم قطروں کا اوسط حسابی
 ہو۔ ضابطہ (۸) اس طرح یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\mathcal{Z} = \iint \text{ی ر فرط مافر} \dots (۱۲) \left[\iint \text{Zr d} \sigma \text{r} \right]$$

جہاں می ایک دیا ہوا تفاعل ہے یہ اور طما کا۔
جو اوپر بیان ہوا اسکے بعد تہرے تلمذ

فبما (لا، ما، می) فرلا فرما فری (۱۳)

کے مفہوم کو زیادہ پختہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ ایک محدود حلقہ کے حصہ میں کوئی محدود

$$\text{تب } \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} (\ln^2(1-x) - \ln^2(1+x)) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln^2 2$$

(۱۷) مطلوبہ حجم اس لئے ہے $\frac{1}{2} \ln^2 2$ مس ص

مثال ۲ - حجم جو کرہ $\frac{1}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{2} \ln^2 2 = \ln^2 2$ (۱۸)

اور اسطوانہ $\frac{1}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{2} \ln^2 2 = \ln^2 2$ (۱۹)
کے درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو -

(اسطوانہ کا نیم قطر کرہ کے نیم قطر سے آدھا ہے اور اس کا محور کرہ کے ایک نصف قطر کی علی القوائیم تنصیف کرتا ہے) -

اگر مستوی $\frac{1}{2} \ln^2 2$ مابین قطبی محد د شامل کئے جائیں تو مساوات (۱۹) یہ شکل اختیار

کرتی ہے $\frac{1}{2} \ln^2 2 = \frac{1}{2} \ln^2 2$ (۲۰)

اور (۱۸) سے مائل ہوتا ہے $\frac{1}{2} \ln^2 2 = \frac{1}{2} \ln^2 2$ (۲۱)
مطلوبہ حجم اس لئے ہے

$$\frac{1}{2} \ln^2 2 = \frac{1}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{2} \ln^2 2 = \ln^2 2$$

(۲۲)

$$\text{اب } \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} (\ln^2(1-x) - \ln^2(1+x)) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln^2 2$$

$$= \frac{1}{2} \ln^2 2 \quad (۱ - \text{جب } \frac{1}{2} \ln^2 2)$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 2 - \frac{1}{2} \ln^2 2 = \frac{1}{2} \ln^2 2 \quad \text{اور}$$

بالآخر نتیجہ ہے $\frac{1}{2} \ln^2 2 - \frac{1}{2} \ln^2 2 = \frac{1}{2} \ln^2 2$ (۲۳)

* امثلہ ۳۶

۲۷۳

۱۔ اگر ایک منحنی ایسا ہو کہ Δ لات تو ثابت کرو کہ جو سطح محوروں سے

اور منحنی کے کسی نقطہ میں سے محدودوں کے متوازی خط کھینچنے سے بنتا ہے منحنی اسکو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جنکے رقبے نسبت Δ : Δ میں ہوتے ہیں۔

۲۔ محور Δ اور منحنی Δ = جب Δ کی نیم موج کی درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ Δ ب ہے۔

۳۔ زنجیر Δ = ج جنر Δ ، محور Δ ، اور خطوط Δ = Δ = Δ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ج جنر Δ ہے۔

۴۔ منحنی Δ = Δ (Δ + Δ) محور Δ کی ساتھ ملے Δ رقبہ گھیرتا ہے۔

۵۔ محور Δ اور منحنی Δ = قو جب Δ کے متوازن موجوں کے درمیان جو رقبہ ہیں ثابت کرو کہ وہ تنزولی ہندسی سلسلہ بناتے ہیں جن کی نسبت مشترک قو Δ ہے۔

۶۔ محور Δ اور مکانی ج Δ = Δ (Δ - Δ) کے درمیان رقبہ Δ = Δ ہے۔

۷۔ منحنیوں Δ = Δ = Δ - Δ = Δ - Δ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ $\left[\frac{9}{4} \right]$

۸۔ مکانیوں Δ = Δ - Δ = Δ - Δ = Δ + Δ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ $\left[\frac{25}{2} \right]$

* مشق کے لئے اور مثالیں "نامہ منحنیات" کے نوں باب کے ختم پر ملینگی۔

۹۔ مکافی $\text{ما} = \text{لا} - \text{ء} + \text{لا} + ۹$ کا قطعہ جو خط مستقیم $\text{ما} = ۳ - ۲ + \text{لا}$ سے
کٹتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔ $\left[\frac{1}{4}\right]$

۱۰۔ مکافیون $\text{ما} = ۴ + \text{لا} + \text{لا}$ $\text{ما} = ۴ + ۲ + \text{ب} (ج - ب - لا)$ کے درمیان کا
رقبہ $\frac{۱}{۲} (۲ + ب) + ۲ + ب$ ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کل رقبہ (جیکہ یہ محدود ہو) جو محور لا اور منحنی $\text{ما} = \frac{1}{۵۵} \text{فہ} (\frac{\text{لا}}{۵۵})$ ۲۶۴

کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ عما کی قیمت پر منحصر نہیں۔

۱۲۔ منحنی $\text{ما} = \text{ب} \sin \frac{\text{لا}}{۲}$ کی مثبت شاخ اس کے متقارب اور محور ما کے
درمیان کا رقبہ $\frac{1}{۲} \text{ب}$ لوگ ۲ ہے۔ [دیکھو شکل ۲۶ صفحہ ۱۱۵]

۱۳۔ دو ناقصوں $\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{ما}}{۲} = ۱$ ، $\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{ما}}{۲} = ۱$ کا مشترک رقبہ
 $\frac{1}{۲} \text{ب} \sin \frac{\text{لا}}{۲}$ ہے۔

۱۴۔ رقبہ جو محدودوں کے محوروں اور مکافی $\left(\frac{\text{لا}}{۲}\right) + \frac{1}{۲} \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) = ۱$ کے

درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\frac{1}{۲} \text{ب}$ جب سہ ہے جہاں محوروں کے درمیان کا زاویہ
 سہ ہے [دیکھو $\text{لا} = \text{لا}$ جب طہ ، $\text{ما} = \text{ب}$ جب طہ]

۱۵۔ مکافی $۲ ج + \text{ما} = \text{لا} + \text{لا}$ اور اس کے دو ماسوں کے درمیان
جو مبداء سے کھینچے جائیں رقبہ $\frac{1}{۳} ج$ ہے۔

۱۶۔ مکافیون $\text{ما} = ۴ + \text{لا}$ ، $\text{لا} = ۴ + \text{ما}$ کا مشترک رقبہ $\frac{14}{۳}$ ہے۔

۱۷۔ مکمل سے ثابت کرو کہ ناقص کا رقبہ ہے $\frac{1}{۲} \text{عما}$ جب سہ جہاں
عما، بہ مزدوج نیم قطروں کے کسی جوڑے کے طول ہیں اور سہ ان کے
درمیان زاویہ ہے۔

۱۸۔ مکمل بالخصوص کا ضابطہ [صفحہ ۸۰ (۲)] اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$\text{ع} \text{ع} \text{ف} \text{و} = \text{ع} \text{و} - \text{ع} \text{و} \text{ف} \text{و}$

ہندسی طور پر رقبوں کی رقوم میں اسکی تقیہ بیان کرو۔
 ۱۹۔ باریک پتر پر ایک منحنی (ب) بنایا گیا ہے اور پتر اپنی سطح میں
 ثابت نقطہ کے گرد زاویہ طما میں سے گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی جو رقبہ جمو کر رہتا
 ہے وہ ہے

۲۰۔ منحنی $(= ۲ + ۳)$ جم طما کو مرشم کرو اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔
 $(\pi 11)$

۲۱۔ منحنی $(= ۲ + ۱)$ جم طما کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو
 ۲۴۵

مکانی $(= ۱۲ + ۱)$ جم طما کے باہر واقع ہوتا ہے۔ $[۳\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}]$
 ۲۲۔ قطبی محدودں میں تحویل کرنے سے ثابت کرو کہ ناقص

$(۱ + ۲) ۲ ۵ ۱۱ + ۱۱ = ۱۱$ کا رقبہ $\frac{11}{2}$ ہے۔

۲۳۔ ایک بے وزن رسی کا طول l ہے، یہ ایک ثابت نقطہ سے بندھی
 ہے اور ایک چھوٹے پھلے میں سے گذرتی ہے جو (چھلہ) ایک افقی سلاخ
 l پر پھسل سکتا ہے سلاخ l میں کی انتصابی سطح میں واقع ہے۔ رسی کا پھیلا
 حصہ انتصابی نیچے لٹکتا ہے اور اس سرے کے ساتھ ایک چھوٹا وزن p بندھا ہے۔
 p کا طریق دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس طریق اور l کے درمیان
 رقبہ l ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰ ۱۰۱ ۱۰۲ ۱۰۳ ۱۰۴ ۱۰۵ ۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۸ ۱۰۹ ۱۱۰ ۱۱۱ ۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۴ ۱۱۵ ۱۱۶ ۱۱۷ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۰ ۱۲۱ ۱۲۲ ۱۲۳ ۱۲۴ ۱۲۵ ۱۲۶ ۱۲۷ ۱۲۸ ۱۲۹ ۱۳۰ ۱۳۱ ۱۳۲ ۱۳۳ ۱۳۴ ۱۳۵ ۱۳۶ ۱۳۷ ۱۳۸ ۱۳۹ ۱۴۰ ۱۴۱ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴ ۱۴۵ ۱۴۶ ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ ۱۵۰ ۱۵۱ ۱۵۲ ۱۵۳ ۱۵۴ ۱۵۵ ۱۵۶ ۱۵۷ ۱۵۸ ۱۵۹ ۱۶۰ ۱۶۱ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴ ۱۶۵ ۱۶۶ ۱۶۷ ۱۶۸ ۱۶۹ ۱۷۰ ۱۷۱ ۱۷۲ ۱۷۳ ۱۷۴ ۱۷۵ ۱۷۶ ۱۷۷ ۱۷۸ ۱۷۹ ۱۸۰ ۱۸۱ ۱۸۲ ۱۸۳ ۱۸۴ ۱۸۵ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸ ۱۸۹ ۱۹۰ ۱۹۱ ۱۹۲ ۱۹۳ ۱۹۴ ۱۹۵ ۱۹۶ ۱۹۷ ۱۹۸ ۱۹۹ ۲۰۰ ۲۰۱ ۲۰۲ ۲۰۳ ۲۰۴ ۲۰۵ ۲۰۶ ۲۰۷ ۲۰۸ ۲۰۹ ۲۱۰ ۲۱۱ ۲۱۲ ۲۱۳ ۲۱۴ ۲۱۵ ۲۱۶ ۲۱۷ ۲۱۸ ۲۱۹ ۲۲۰ ۲۲۱ ۲۲۲ ۲۲۳ ۲۲۴ ۲۲۵ ۲۲۶ ۲۲۷ ۲۲۸ ۲۲۹ ۲۳۰ ۲۳۱ ۲۳۲ ۲۳۳ ۲۳۴ ۲۳۵ ۲۳۶ ۲۳۷ ۲۳۸ ۲۳۹ ۲۴۰ ۲۴۱ ۲۴۲ ۲۴۳ ۲۴۴ ۲۴۵ ۲۴۶ ۲۴۷ ۲۴۸ ۲۴۹ ۲۵۰ ۲۵۱ ۲۵۲ ۲۵۳ ۲۵۴ ۲۵۵ ۲۵۶ ۲۵۷ ۲۵۸ ۲۵۹ ۲۶۰ ۲۶۱ ۲۶۲ ۲۶۳ ۲۶۴ ۲۶۵ ۲۶۶ ۲۶۷ ۲۶۸ ۲۶۹ ۲۷۰ ۲۷۱ ۲۷۲ ۲۷۳ ۲۷۴ ۲۷۵ ۲۷۶ ۲۷۷ ۲۷۸ ۲۷۹ ۲۸۰ ۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۳ ۲۸۴ ۲۸۵ ۲۸۶ ۲۸۷ ۲۸۸ ۲۸۹ ۲۹۰ ۲۹۱ ۲۹۲ ۲۹۳ ۲۹۴ ۲۹۵ ۲۹۶ ۲۹۷ ۲۹۸ ۲۹۹ ۳۰۰ ۳۰۱ ۳۰۲ ۳۰۳ ۳۰۴ ۳۰۵ ۳۰۶ ۳۰۷ ۳۰۸ ۳۰۹ ۳۱۰ ۳۱۱ ۳۱۲ ۳۱۳ ۳۱۴ ۳۱۵ ۳۱۶ ۳۱۷ ۳۱۸ ۳۱۹ ۳۲۰ ۳۲۱ ۳۲۲ ۳۲۳ ۳۲۴ ۳۲۵ ۳۲۶ ۳۲۷ ۳۲۸ ۳۲۹ ۳۳۰ ۳۳۱ ۳۳۲ ۳۳۳ ۳۳۴ ۳۳۵ ۳۳۶ ۳۳۷ ۳۳۸ ۳۳۹ ۳۴۰ ۳۴۱ ۳۴۲ ۳۴۳ ۳۴۴ ۳۴۵ ۳۴۶ ۳۴۷ ۳۴۸ ۳۴۹ ۳۵۰ ۳۵۱ ۳۵۲ ۳۵۳ ۳۵۴ ۳۵۵ ۳۵۶ ۳۵۷ ۳۵۸ ۳۵۹ ۳۶۰ ۳۶۱ ۳۶۲ ۳۶۳ ۳۶۴ ۳۶۵ ۳۶۶ ۳۶۷ ۳۶۸ ۳۶۹ ۳۷۰ ۳۷۱ ۳۷۲ ۳۷۳ ۳۷۴ ۳۷۵ ۳۷۶ ۳۷۷ ۳۷۸ ۳۷۹ ۳۸۰ ۳۸۱ ۳۸۲ ۳۸۳ ۳۸۴ ۳۸۵ ۳۸۶ ۳۸۷ ۳۸۸ ۳۸۹ ۳۹۰ ۳۹۱ ۳۹۲ ۳۹۳ ۳۹۴ ۳۹۵ ۳۹۶ ۳۹۷ ۳۹۸ ۳۹۹ ۴۰۰ ۴۰۱ ۴۰۲ ۴۰۳ ۴۰۴ ۴۰۵ ۴۰۶ ۴۰۷ ۴۰۸ ۴۰۹ ۴۱۰ ۴۱۱ ۴۱۲ ۴۱۳ ۴۱۴ ۴۱۵ ۴۱۶ ۴۱۷ ۴۱۸ ۴۱۹ ۴۲۰ ۴۲۱ ۴۲۲ ۴۲۳ ۴۲۴ ۴۲۵ ۴۲۶ ۴۲۷ ۴۲۸ ۴۲۹ ۴۳۰ ۴۳۱ ۴۳۲ ۴۳۳ ۴۳۴ ۴۳۵ ۴۳۶ ۴۳۷ ۴۳۸ ۴۳۹ ۴۴۰ ۴۴۱ ۴۴۲ ۴۴۳ ۴۴۴ ۴۴۵ ۴۴۶ ۴۴۷ ۴۴۸ ۴۴۹ ۴۵۰ ۴۵۱ ۴۵۲ ۴۵۳ ۴۵۴ ۴۵۵ ۴۵۶ ۴۵۷ ۴۵۸ ۴۵۹ ۴۶۰ ۴۶۱ ۴۶۲ ۴۶۳ ۴۶۴ ۴۶۵ ۴۶۶ ۴۶۷ ۴۶۸ ۴۶۹ ۴۷۰ ۴۷۱ ۴۷۲ ۴۷۳ ۴۷۴ ۴۷۵ ۴۷۶ ۴۷۷ ۴۷۸ ۴۷۹ ۴۸۰ ۴۸۱ ۴۸۲ ۴۸۳ ۴۸۴ ۴۸۵ ۴۸۶ ۴۸۷ ۴۸۸ ۴۸۹ ۴۹۰ ۴۹۱ ۴۹۲ ۴۹۳ ۴۹۴ ۴۹۵ ۴۹۶ ۴۹۷ ۴۹۸ ۴۹۹ ۵۰۰ ۵۰۱ ۵۰۲ ۵۰۳ ۵۰۴ ۵۰۵ ۵۰۶ ۵۰۷ ۵۰۸ ۵۰۹ ۵۱۰ ۵۱۱ ۵۱۲ ۵۱۳ ۵۱۴ ۵۱۵ ۵۱۶ ۵۱۷ ۵۱۸ ۵۱۹ ۵۲۰ ۵۲۱ ۵۲۲ ۵۲۳ ۵۲۴ ۵۲۵ ۵۲۶ ۵۲۷ ۵۲۸ ۵۲۹ ۵۳۰ ۵۳۱ ۵۳۲ ۵۳۳ ۵۳۴ ۵۳۵ ۵۳۶ ۵۳۷ ۵۳۸ ۵۳۹ ۵۴۰ ۵۴۱ ۵۴۲ ۵۴۳ ۵۴۴ ۵۴۵ ۵۴۶ ۵۴۷ ۵۴۸ ۵۴۹ ۵۵۰ ۵۵۱ ۵۵۲ ۵۵۳ ۵۵۴ ۵۵۵ ۵۵۶ ۵۵۷ ۵۵۸ ۵۵۹ ۵۶۰ ۵۶۱ ۵۶۲ ۵۶۳ ۵۶۴ ۵۶۵ ۵۶۶ ۵۶۷ ۵۶۸ ۵۶۹ ۵۷۰ ۵۷۱ ۵۷۲ ۵۷۳ ۵۷۴ ۵۷۵ ۵۷۶ ۵۷۷ ۵۷۸ ۵۷۹ ۵۸۰ ۵۸۱ ۵۸۲ ۵۸۳ ۵۸۴ ۵۸۵ ۵۸۶ ۵۸۷ ۵۸۸ ۵۸۹ ۵۹۰ ۵۹۱ ۵۹۲ ۵۹۳ ۵۹۴ ۵۹۵ ۵۹۶ ۵۹۷ ۵۹۸ ۵۹۹ ۶۰۰ ۶۰۱ ۶۰۲ ۶۰۳ ۶۰۴ ۶۰۵ ۶۰۶ ۶۰۷ ۶۰۸ ۶۰۹ ۶۱۰ ۶۱۱ ۶۱۲ ۶۱۳ ۶۱۴ ۶۱۵ ۶۱۶ ۶۱۷ ۶۱۸ ۶۱۹ ۶۲۰ ۶۲۱ ۶۲۲ ۶۲۳ ۶۲۴ ۶۲۵ ۶۲۶ ۶۲۷ ۶۲۸ ۶۲۹ ۶۳۰ ۶۳۱ ۶۳۲ ۶۳۳ ۶۳۴ ۶۳۵ ۶۳۶ ۶۳۷ ۶۳۸ ۶۳۹ ۶۴۰ ۶۴۱ ۶۴۲ ۶۴۳ ۶۴۴ ۶۴۵ ۶۴۶ ۶۴۷ ۶۴۸ ۶۴۹ ۶۵۰ ۶۵۱ ۶۵۲ ۶۵۳ ۶۵۴ ۶۵۵ ۶۵۶ ۶۵۷ ۶۵۸ ۶۵۹ ۶۶۰ ۶۶۱ ۶۶۲ ۶۶۳ ۶۶۴ ۶۶۵ ۶۶۶ ۶۶۷ ۶۶۸ ۶۶۹ ۶۷۰ ۶۷۱ ۶۷۲ ۶۷۳ ۶۷۴ ۶۷۵ ۶۷۶ ۶۷۷ ۶۷۸ ۶۷۹ ۶۸۰ ۶۸۱ ۶۸۲ ۶۸۳ ۶۸۴ ۶۸۵ ۶۸۶ ۶۸۷ ۶۸۸ ۶۸۹ ۶۹۰ ۶۹۱ ۶۹۲ ۶۹۳ ۶۹۴ ۶۹۵ ۶۹۶ ۶۹۷ ۶۹۸ ۶۹۹ ۷۰۰ ۷۰۱ ۷۰۲ ۷۰۳ ۷۰۴ ۷۰۵ ۷۰۶ ۷۰۷ ۷۰۸ ۷۰۹ ۷۱۰ ۷۱۱ ۷۱۲ ۷۱۳ ۷۱۴ ۷۱۵ ۷۱۶ ۷۱۷ ۷۱۸ ۷۱۹ ۷۲۰ ۷۲۱ ۷۲۲ ۷۲۳ ۷۲۴ ۷۲۵ ۷۲۶ ۷۲۷ ۷۲۸ ۷۲۹ ۷۳۰ ۷۳۱ ۷۳۲ ۷۳۳ ۷۳۴ ۷۳۵ ۷۳۶ ۷۳۷ ۷۳۸ ۷۳۹ ۷۴۰ ۷۴۱ ۷۴۲ ۷۴۳ ۷۴۴ ۷۴۵ ۷۴۶ ۷۴۷ ۷۴۸ ۷۴۹ ۷۵۰ ۷۵۱ ۷۵۲ ۷۵۳ ۷۵۴ ۷۵۵ ۷۵۶ ۷۵۷ ۷۵۸ ۷۵۹ ۷۶۰ ۷۶۱ ۷۶۲ ۷۶۳ ۷۶۴ ۷۶۵ ۷۶۶ ۷۶۷ ۷۶۸ ۷۶۹ ۷۷۰ ۷۷۱ ۷۷۲ ۷۷۳ ۷۷۴ ۷۷۵ ۷۷۶ ۷۷۷ ۷۷۸ ۷۷۹ ۷۸۰ ۷۸۱ ۷۸۲ ۷۸۳ ۷۸۴ ۷۸۵ ۷۸۶ ۷۸۷ ۷۸۸ ۷۸۹ ۷۹۰ ۷۹۱ ۷۹۲ ۷۹۳ ۷۹۴ ۷۹۵ ۷۹۶ ۷۹۷ ۷۹۸ ۷۹۹ ۸۰۰ ۸۰۱ ۸۰۲ ۸۰۳ ۸۰۴ ۸۰۵ ۸۰۶ ۸۰۷ ۸۰۸ ۸۰۹ ۸۱۰ ۸۱۱ ۸۱۲ ۸۱۳ ۸۱۴ ۸۱۵ ۸۱۶ ۸۱۷ ۸۱۸ ۸۱۹ ۸۲۰ ۸۲۱ ۸۲۲ ۸۲۳ ۸۲۴ ۸۲۵ ۸۲۶ ۸۲۷ ۸۲۸ ۸۲۹ ۸۳۰ ۸۳۱ ۸۳۲ ۸۳۳ ۸۳۴ ۸۳۵ ۸۳۶ ۸۳۷ ۸۳۸ ۸۳۹ ۸۴۰ ۸۴۱ ۸۴۲ ۸۴۳ ۸۴۴ ۸۴۵ ۸۴۶ ۸۴۷ ۸۴۸ ۸۴۹ ۸۵۰ ۸۵۱ ۸۵۲ ۸۵۳ ۸۵۴ ۸۵۵ ۸۵۶ ۸۵۷ ۸۵۸ ۸۵۹ ۸۶۰ ۸۶۱ ۸۶۲ ۸۶۳ ۸۶۴ ۸۶۵ ۸۶۶ ۸۶۷ ۸۶۸ ۸۶۹ ۸۷۰ ۸۷۱ ۸۷۲ ۸۷۳ ۸۷۴ ۸۷۵ ۸۷۶ ۸۷۷ ۸۷۸ ۸۷۹ ۸۸۰ ۸۸۱ ۸۸۲ ۸۸۳ ۸۸۴ ۸۸۵ ۸۸۶ ۸۸۷ ۸۸۸ ۸۸۹ ۸۹۰ ۸۹۱ ۸۹۲ ۸۹۳ ۸۹۴ ۸۹۵ ۸۹۶ ۸۹۷ ۸۹۸ ۸۹۹ ۹۰۰ ۹۰۱ ۹۰۲ ۹۰۳ ۹۰۴ ۹۰۵ ۹۰۶ ۹۰۷ ۹۰۸ ۹۰۹ ۹۱۰ ۹۱۱ ۹۱۲ ۹۱۳ ۹۱۴ ۹۱۵ ۹۱۶ ۹۱۷ ۹۱۸ ۹۱۹ ۹۲۰ ۹۲۱ ۹۲۲ ۹۲۳ ۹۲۴ ۹۲۵ ۹۲۶ ۹۲۷ ۹۲۸ ۹۲۹ ۹۳۰ ۹۳۱ ۹۳۲ ۹۳۳ ۹۳۴ ۹۳۵ ۹۳۶ ۹۳۷ ۹۳۸ ۹۳۹ ۹۴۰ ۹۴۱ ۹۴۲ ۹۴۳ ۹۴۴ ۹۴۵ ۹۴۶ ۹۴۷ ۹۴۸ ۹۴۹ ۹۵۰ ۹۵۱ ۹۵۲ ۹۵۳ ۹۵۴ ۹۵۵ ۹۵۶ ۹۵۷ ۹۵۸ ۹۵۹ ۹۶۰ ۹۶۱ ۹۶۲ ۹۶۳ ۹۶۴ ۹۶۵ ۹۶۶ ۹۶۷ ۹۶۸ ۹۶۹ ۹۷۰ ۹۷۱ ۹۷۲ ۹۷۳ ۹۷۴ ۹۷۵ ۹۷۶ ۹۷۷ ۹۷۸ ۹۷۹ $$

ہوگا جبکہ سلاح پ ق ایک پورا چکر لگاتی ہے اور نقطہ ق ایک بند مخنی مرسم کرتا ہے۔

۲۶۔ ایک سطح پیا ایسی شکل کا ہے کہ اس کے جس بازو کے ساتھ مرسم نقطہ لگا ہوا ہے اس کا دوسرا سر ایک انتصابی محور پر چل کی صورت میں لگا ہوا ہے۔ انتصابی محور کو ایک چھوٹی گاڑی اٹھائے پھرتی ہے جو کاغذ پر (بغیر پھیلنے کے) آگے پیچھے لڑک سکتی ہے اور اس کے ساتھ ایک درجہ وار پیمہ لگا ہوا ہے جو کل لڑکنے کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب مرسم نقطہ ایک بند مخنی مرسم کرتا ہے تو پیمہ کے نشانات سے کسی خاص پیمانہ پر رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۷۔ ایک سلاح پیمہ نقطے ا ب ج ہیں، یہ سلاح اپنے مستوی میں حرکت کرتی ہے اور یہ نقطے بند مخنی مرسم کرتے ہیں جن کے رقبے س، س، س، س، س، س، س، س ہیں، سلاح بغیر پورا چکر لگانے کے اپنے اصلی مقام پر پھر آجاتی ہے، ثابت کرو کہ

$$س ج \times س ا + ج ا \times س ب + ا ب \times س ج = ۰$$

جہاں خطوط ب ج، ج ا، ا ب کی علامات انہی سمتوں کے مطابق ہیں اور

س، س، س، س، س، س، س، س کی علامتیں دفعہ ۱۰ کے قاعدہ سے متعین ہوتی ہیں۔

۲۸۔ سلاح ا ب پر ایک نقطہ پ ہے، یہ سلاح ایک ہی مستوی میں حرکت کرتی ہے اور ایک گردش پوری کرنے کے بعد اپنے اصلی مقام پر واپس آجاتی ہے۔

$$ثابت کرو کہ س پ = \frac{ا س ب + ب س ا}{ا + ب} - ۲ ا ب$$

۲۹۔ جہاں ا = (ا ب) ب = پ ب اور س ا، س ب، س پ کا مفہوم وہی ہے جو اوپر کے سوال میں۔

اس لئے ثابت کرو کہ اگر سلاح کے سرے ا، ب ایک بند بیضوی مخنی پر حرکت

کریں تو س، س - س پ = ۲ ا ب [ہولڈج]

۲۹۔ مستقل طول کا ایک خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے سرے دو ثابت متقاطع خطوط مستقیم پر ہمیشہ واقع ہوتے ہیں ثابت کرو کہ اس پر کا کوئی نقطہ پ ایک ناقص منحنی کرتا ہے جس کا رقبہ $\pi \times \text{اپ} \times \text{پ ب}$ ہے۔

امثلہ ۳۷

جسم

۱۔ منحنی ما = ب جب $\frac{1}{r}$ کی نسیم موج کو محور لا کے

گرد پھرانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے ثابت کرو کہ وہ مائٹ اسطوانہ کا نصف ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ ایک مخروط ناقص کا حجم جس کے سرے متوازی ہیں

$\frac{1}{4} \{ \text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \text{ق}_4 \}$ ہے جہاں ق، ق، ق، ق اسکے سروں

کے رقبے ہیں اور ف ان کے درمیان عمودی فاصلہ ہے۔

۳۔ محور لا کے گرد قائم زائد لا۔ ما = ر کی گردش سے جو منحنی پیدا

ہوتا ہے اس کے ایک قطعہ کا حجم جسکی اونچائی ر ہو جسے راس سے ناپا جائے

ایک کرہ کے حجم کے مساوی ہوگا جس کا نیم قطر ر ہو۔

۴۔ ایک قطعہ کرہ دو متوازی مستویوں سے گھرا ہوا ہے جن کا درمیانی

عمودی فاصلہ ف ہے۔

ثابت کرو کہ اس کا حجم، اس اسطوانہ کے حجم سے جس کا ارتفاع ف ہے

اور جسکی عمودی تراش کا رقبہ مستوی سروں کے رقبوں کا اوسط حسابی ہے بقدر اس

کرہ کے حجم کے زیادہ ہے جس کا قطر ف ہے۔

۵۔ ایک نیم کرہ کا نیم قطر ر ہے، اس کے قاعدہ سے فاصلہ ۲ جب ۱۰

پر، قاعدہ کے متوازی ایک مستوی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نیم کرہ کے حجم کی

* دیکھو صفحہ (۳۷۸) کے نیچے کانٹ۔

تصنیف کرتا ہے۔

۶۔ نیم قطر ۱ کے ایک ٹھوس کرہ کا جو حصہ نیم قطر ب (۱۲ >) کی کرہی سطح کے اندر شامل ہے جس کا مرکز ٹھوس کرہ کی سطح پر واقع ہے اس حصہ کو نکال دیا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ اس کے خلا کا حجم نیم قطر ب کے نیم کرہ کے حجم سے بقدر $\frac{2}{3} \pi b^3$ کے کم ہے۔

۷۔ جو قصبہ مکانی ج ما = (لا - ۱) (لا - ب) اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے۔

$$\frac{1}{3} \pi (1 - b) / ج$$

۸۔ اگر ایک قطعہ مکانی معین کے گرد گھومے تو حجم پیدا شدہ مانٹا اسطوانہ کے $\frac{1}{15}$ کے مساوی ہوگا۔

۹۔ ایسے مجسم کا حجم جو مکانی کو رائس پر کے ماس کے گرد پھرنے سے پیدا ہوتا ہے مانٹا اسطوانہ کا $\frac{1}{8}$ ہے۔

۱۰۔ مکانی ما = ۴ لا کا وہ حصہ جو ترخاس سے کٹتا ہے مرتب کے گرد گردش کرتا ہے ثابت کر دو کہ پیدائندہ حلقہ نما مجسم کا حجم $\frac{152}{15} \pi$ ہے۔

۱۱۔ وتر لا = ف منحنی لا ما = لا اسے جو حصہ کٹتا ہے اسے محور لا کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کر دو کہ حجم پیدا شدہ اس اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور جو اسی قاعدہ پر قائم ہے۔

۱۲۔ مثلثی منشور کے ایسے نقطوعد کا حجم جس کو کوئی دوستوی قطع کریں

$$\frac{1}{3} (f + f + f) (ق) \text{ ہے جہاں } f, f, f$$

تین متوازی کناروں کے طول ہیں اور ان کناروں پر عمود دار تراش کا رقبہ ق ہے۔

۱۳۔ ایک پیپے کی وسطی تراش کا نیم قطر ب ہے اور ہر سرے کا نیم قطر ۱ ہے۔ ثابت کر دو کہ پیپے کا حجم $\frac{11}{15} \pi (13 + ۴ + ۱ + ۸ + ۲) f$

جہاں ف پیسے کا طول ہے۔ یہ ان لیا گیا ہے کہ پیسے کا کمون یعنی مکانی کی ایک قوس ہے۔
۱۴۔ دائرہ کی ایک قوس اپنے وتر کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ حجم کا حجم ہے

$$\frac{2}{3} \pi r^2 \text{ راجب عدا} + \frac{2}{3} \pi r^2 \text{ راجب عدا حجم عدا} - \frac{2}{3} \pi r^2 \text{ راجب عدا}$$

جہاں ر نیم قطر ہے اور ۲ عدا قوس کی زاوی بیانش ہے۔

۱۵۔ وہ شکل جو نیم قطر کے دائرہ کے ربع اور اس کے سروں کے ماسوں سے گھری ہوئی ہے ان ماسوں میں سے ایک کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو حجم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم ہے

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \pi r^2$$

۱۶۔ دوساوی نیم قطر کے قائم مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دونوں سے گھرا ہوا حجم $\frac{1}{2} \pi r^2$ ہے۔
اگر ان کے محور زاویہ عدا پر قطع کریں تو حجم $\frac{1}{2} \pi r^2$ قائم عدا ہے۔

۱۷۔ اگر قطع زائد $\frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 = 1$ محور لا کے گرد گھومے تو وہ حجم

جو اس سطح، متقاربوں سے تشکیل شدہ مخروط اور محور کا کے علی القوائم دو مستویوں کے درمیان گھرجاتا ہے جہاں مستویوں کا فصل ف ہے اس مستدیر اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور نیم قطر ب۔

۱۸۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا نصف زاویہ عدا ہے اس کا راس نیم قطر کے ایک کرہ کی سطح پر ہے اور اس کا محور مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کے اس حصہ کا حجم جو مخروط سے باہر ہے $\frac{2}{3} \pi r^2$ راجب عدا ہے۔

۱۹۔ المرفہ ۱۰۹ کے سمپسن کے طریقہ میں جہاں دو متوازی تراشوں میں سے ایک کے درمیان جو حجم شامل ہے وہ معلوم کیا گیا ہے، درمیان کی تراش میں تراشوں

میں سے بالترتیب فاصلوں h_1 پر ہو تو ضابطہ ہوگا

$$\frac{5+g}{4h+k} \{ (2h-k)k + (h+g)k + (h+g)h + (h+g)h \}$$

* امثلہ ۲۸ منحنی خط اور سطحیں

۱۔ جیب کے منحنی ما = ب جب لا، کی پوری موج (Undulation)

کا طول ایک ناقص کے محیط کے مساوی ہے جبکہ نیم محور a + b اور a اور b ہیں۔
۲۔ کسی منحنی میں بدا سے اسکے کسی ماس پر جو عمود (C) کھینچ سکتا ہے اسکے طول کے لئے یہ ضابطہ مائل کرو۔

$$C = \frac{a}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}$$

نیز ثابت کرو کہ مستی نیم قطر کا ماس پر قائم مثل ہے

$$C = \frac{a}{\cos \theta} + \frac{b}{\sin \theta} \text{ یا } \frac{a}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}$$

۳۔ زنجیرہ (Catenary) ما = ج جسٹ لا کی کسی قوس کے

جو اس سے شروع ہوتی ہے، مرتب کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح $\pi (ج لا + ماس)$ ہے جہاں لا، ما، ماس اس قوس کے دوسرے سرے سے متعلق ہیں۔

۴۔ گردشی رکافی ناسے محور پر علی التوائم مستوی سے منحنی سطح کا جو صدر کشا ہے وہ ہے

$$\frac{1}{4} \pi \{ (2f + b) - b \}$$

* صفحہ ۴۷۴ کے نیچے نوٹ دیکھو۔

جہاں محور کا طول ϕ ہے اور اعاطہ کرنے والے دائرہ کا نیم قطر b ۔

۵۔ مکانی $\phi = ۴۰^\circ$ کی قوس کو جو مبدأ اور معین $\phi = ۳۰^\circ$ کے درمیان

ہے محور ϕ کے گرد گھمانے سے جو نغنی سطح پیدا ہوتی ہے وہ $\phi = ۵۶^\circ$ ہے۔

۶۔ مکانی کی قوس کا وہ حصہ جو رأس اور وتر خاص کے درمیان واقع ہے

محور کے گرد پھیرا گیا ہے، ثنابت کرو کہ جسم کی نغنی سطح کا عہدہ کے رقبہ کی ۲۱۹ اگنا ہے۔

۷۔ دائرہ کی قوس اپنے وتر کے گرد گھومتی ہے، ثنابت کرو کہ سطح جو پیدا ہوتی ہے

وہ ہے $\phi = ۴۰^\circ$ (جب $\phi = ۷۰^\circ$ - عجم ϕ) جہاں ϕ نیم قطر ہے اور قوس کا زاویہ

ناپ ۲۰° ہے۔

۸۔ نیم قطر ϕ کے دائرہ کا ربع اپنے سرے پر کے قوس کے گرد گھومتا ہے ثنابت

کرو کہ نغنی سطح کا رقبہ $\phi = (۲ - \pi)$ ہے۔

۹۔ نیم قطر ϕ کا ایک ثنابت کرہ ہے۔ اسکی سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر نیم قطر

ر کا ایک متغیر لہ بنایا گیا ہے ثنابت کرو کہ اسکی سطح کا رقبہ جو ثنابت کرہ کے حامل ہونے

سے قطع ہوتا ہے وہ زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ $\phi = ۴۰^\circ$ ۔

۱۰۔ کرہ کا ایک ماسی مخروط کھینچا گیا ہے اور مخروط کے رأس کو مرکز مان کر دو

کروی سطحیں کھینچی گئی ہیں جو کرہ اور مخروط دونوں کو قطع کرتی ہیں۔ ثنابت کرو کہ کرہ اور

مخروط پر جو منطقے قطع ہوتے ہیں ان کے رقبے مساوی ہیں۔

امثلہ ۳۹

تقریبی تربیع۔ اوسط قیمتیں

۱۔ لوک ϕ کو مضابطہ لوک $\phi = ۲$ $\int_0^1 \frac{1}{\phi} d\phi$ سے حاصل کر نیکی لے

محسن کا قاعدہ لگاؤ۔ [تیک قیمت ہے لوک $\phi = ۲$ $\int_0^1 \frac{1}{\phi} d\phi = ۰.۶۹۳۱۴۰...$]

۲۔ π کی قیمت مضابطہ $\phi = \frac{\pi}{4}$ $\int_0^1 \frac{1}{\phi} d\phi$ سے حاصل کرو۔

۳۔ (دفعہ ۱۱۴) تین معین والے سمت کے طریقہ میں، درمیانی معین $\frac{1}{2}$ معینوں

کا، مکہ سے غیر مساوی فاصلوں 'ھ' گ پر ہے، اس صورت میں ضابطہ ہے

$$\frac{1}{4} (ھ + گ) (۴ + ۴ + ۴ + ۴) + \frac{1}{4} (ھ - گ) (۱ - ۱ - ۱ - ۱) = \frac{۴ - ۴}{۴} = ۰$$

۴۔ قطع ناقص کے قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

ان قطروں کے مربعوں کا اوسط، اعظم اور اصغر محوروں کے حاصل ضرب کے

مساوی ہے۔

۵۔ طول ۱ کے خط مستقیم پر ایسے ہی کوئی نقطہ لے لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ

دو حصوں کی سطح کا اوسط $\frac{1}{4}$ ہے اور دو حصوں کے مربعوں کے مجموعہ کی

اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔

۶۔ اگر ایک نقطہ مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرے تو وقت کے

مساوی اور لامتناہی چھوٹے وقفوں پر کی رفتاروں کا اوسط مربع

$\frac{1}{4} (۴ + ۴ + ۴ + ۴)$ کے مساوی ہے جہاں ۴ اور ۴ ابتدائی

اور آخری رفتاریں ہیں۔

۷۔ سادہ ہوائی حرکت میں ثابت کرو کہ اوسط توانائی بالحرکت، زیادہ سے

زیادہ توانائی بالحرکت کا نصف ہے۔

۸۔ ایک ذرہ، دی ہوئی رفتار، مگر اختیاری زاویہ ارتفاع سے پھینکا گیا ہے،

ثابت کرو کہ اوسط افقی $\frac{1}{2}$ (Range) زیادہ سے زیادہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

۹۔ ناقص کے ماسکی نیم قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں ثابت

کرو کہ ان ماسکی نیم قطروں کا اوسط، نیم محور اصغر کے مساوی ہے۔

۱۰۔ نیم کرہ کی تختی سطح پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ قاعدہ کے مستوی سے

نیم قطر کے نصف کے مساوی ہے۔

۱۱۔ نیم کرہ کے قطب سے کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہے جہاں کرہ کا نیم قطر ۱ ہے۔

۱۲۔ دائری رقبہ کا نیم قطر $\frac{1}{2}$ ہے، مرکز سے 'نیز محیط پر کے کسی نقطہ سے اس رقبہ پر کے نقطوں کے فاصلوں کے متکافوں کی اوسط قیمتیں دریافت کرو۔

$$\left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi} \right]$$

۱۳۔ ایک ڈنڈے کی شکل گردشیں لمبو تر سے ناقص نما کی ہے جو بہت لمبا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا اوسط تراشی رقبہ مرکز پر کی تراش کے رقبہ کا دو تہائی ہے۔

۱۴۔ برقائی ہونی گول کیا پر سطحی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے $(\frac{1}{r} - \frac{1}{R})^2$ جہاں $\frac{1}{r}$ کا نیم قطر $\frac{1}{R}$ ہے اور $\frac{1}{r}$ مرکز سے نقطہ کا فاصلہ ہے۔ اوسط کثافت کی نسبت مرکز پر کی کثافت کے ساتھ دریافت کرو۔

۱۵۔ اگر شہابوں (Comets) کے مدار فضائیں یکساں طور پر منقسم ہوتے تو طریق الشمس کے ساتھ ان کا اوسط میلان نیم قطری (545×297) ہوتا۔

۱۶۔ نیم قطر $\frac{1}{2}$ کی کردی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ایک ایسے نقطہ

پ سے جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ہے اگر پ کرہ کے باہر ہو اور $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ہے اگر پ کرہ کے اندر ہو۔

۱۷۔ ایک دائرہ کا نیم قطر $\frac{1}{2}$ ہے، اس کے محیط پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے 1.5708 ہے۔

۱۸۔ ایک دائری رقبہ کا نیم قطر $\frac{1}{2}$ ہے۔ اس پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے 1.5132 ہے۔

۱۹۔ کرہ کے اندر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ سطح پر کے ایک دے ہوئے نقطہ سے $\frac{1}{2}$ ہے۔

۲۰۔ اگر زمین کے مرکز سے فاصلہ $\frac{1}{2}$ پر کثافت اس ضابطہ $\frac{1}{r^2}$ سے حاصل ہو جہاں $\frac{1}{r}$ مستقل ہے تو ثابت کرو کہ

۶۔ نیم قطر ۱ کے کرہ کو ایک ستوی کے ذریعہ جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے دو قطعوں میں تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان قطعوں کے اوسط مرکوزوں کا فاصلہ کرہ کے مرکز سے $\frac{۳}{۴} \times \frac{(ج \pm ۱)^۲}{ج \pm ۱۲}$ ہے۔

۷۔ نیم قطر کا ربع دائرہ ہے، اسکی قوس اور سروں کے ماسوں سے جو شکل بنتی ہے اسکو ایک ماس کے گرد پھرانے سے مجسم بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مجسم کے اوسط مرکز کا فاصلہ رأس سے ۱.۰۸۶۹ ہے۔

۸۔ نوکہار محراب کی شکل کا ٹھوس چھرومکانی رقبہ اپن کو پ ن کے گرد پھرانے سے بنایا گیا ہے جہاں ا ر رأس ہے اور پ ن عین ہے ثابت کرو کہ اس کا اوسط مرکز محور کو نسبت ۵:۱۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

۹۔ رأس سے شروع ہو کر کافی کی ایک قوس اپن اور پ ن راس پر کے ماس پر نمود ہے۔ ثابت کرو کہ شکل اپن کو ا ر ن کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کے اوسط مرکز کا فاصلہ ا ر سے $\frac{۵}{۴}$ ا ر ن کے مساوی ہے۔

۱۰۔ دو مساوی مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اس حجم کا اوسط مرکز جو ان اسطوانوں اور ان کے محوروں کے مستوی کے درمیان ہے اس مستوی سے $\frac{۳}{۸}$ کے فاصلہ پر ہے جہاں ۱ مشترک نیم قطر ہے۔

۱۱۔ ربع دائرہ اپنے ایک سرے پر کے ماس کے گرد گھماتا ہے اس طرح سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اسکی مغنی سطح کا اوسط مرکز رأس سے ۱.۰۸۷۶ کے فاصلہ پر ہے۔

۱۲۔ لنگر چلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں ان میں سے کسی حصہ کی مغنی سطح کے اوسط مرکز کا فاصلہ اس استوائی

مستوی سے $\frac{۲۲}{۳}$ ہے جہاں ب تکونی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۳۔ لنگر چلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے اس کے جو دو مساوی

حصے ہو جاتے ہیں ان میں سے کسی ایک کے حجم کا اوسط مرکز استوائی مستوی سے فاصلہ $\frac{۴}{۱۱۳}$ ہے

پر ہے جہاں ب تکوینی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۴۔ ناقص $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ کو محور ما د مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے کسی ایک حصہ کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح کا اوسط مرکز ' مرکز سے فاصلہ

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ پر واقع ہے جہاں ز خروج مرکز ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ $b > 1$ ۔ متناظر نتیجہ مائل کر دیکھ $b < 1$ ۔

۱۵۔ بیسیں کے مسئلہ لگانے سے قائم مستدیر مخروط اور قائم مستدیر مخروط ناقص کا حجم اور اسکی منحنی سطح دریافت کرو۔

۱۶۔ انیم قطر $\frac{1}{2}$ کے ایک اسطوانہ کے گرد ایک نالی کالی گئی ہے جس کی عمودی تراش نیم قطر $\frac{1}{2}$ والا ایک نصف دائرہ ہے ثابت کرو کہ حجم جو نکال دیا گیا ہے وہ ہے $\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi^2$ ۔

نیز نالی کی سطح ہے $\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi^2$ ۔

۱۷۔ ایک مستدیر اسطوانہ کا نیم قطر $\frac{1}{2}$ ہے اس کی سطح پر مستطیلی تراش کا

ایک پہنچ تاگا کاٹا گیا ہے ثابت کرو کہ ساگے کے ایک پھیر کا حجم

$\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \pi$ ہے جہاں $\frac{1}{2} \pi$ مستطیل کے ضلعے ہیں اور $\frac{1}{2} \pi$ وہ ضلع ہے جو اسطوانہ کی سطح پر عمود دار ہے۔

۱۸۔ ایک بند منحنی کے محیط کے اوسط مرکز میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے اور یہ محیط کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان حصوں کو اس خط سے گرد گھمائے سے جو مجسم پیدا ہوتے ہیں ان کی منحنی سطحیں مساوی ہیں۔

۱۹۔ رقبہ قی محاور لا اور ما کے گرد گھومنے سے حجم ع اور بالترتیب پیدا کرتا ہے۔ بتاؤ کہ کیا رقبہ پیدا ہوگا اگر یہ خط

لا حجم ع + ما جب ع = ع کے گرد گھومے۔ اس میں مان لیا جائے کہ

خط رقبہ کو نہیں کاٹتا۔

امثلہ ۴۱

ضعفی تکملے

۱۔ تکملات $\left[\frac{2}{3} (لا + ما) \right] فلا فرما' \left[\frac{2}{3} (لا) \right] - \left[\frac{2}{3} (ما) \right] فلا فرما$

کی قیمتیں دریافت کرو جبکہ انہیں ناقص $\frac{2}{3} (لا) + \frac{2}{3} (ما) =$ ا کے رقبہ پر لیا جائے

۷۔ ثابت کرو کہ اسطوانوں $لا + ما = ۲ لا$ ، $ما = ۲ لا$

کے درمیان کا حجم $\frac{128}{18}$ ہے۔

۳۔ نیم قطر ۲ کا ایک کرہ بنایا گیا ہے جبکہ اس کا مرکز نیم قطر کے اسطوانہ کی سطح پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی سطح کا جو حصہ کرہ کے اندر ہے اس کا رقبہ ۱۶ ہے۔

۴۔ حجم جو ناقصی سکائی تا $۲ سی = \frac{2}{3} (لا) + \frac{2}{3} (ما)$ ، اسطوانہ $لا + ما = ۲ لا$

اور مستوی سی = کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ ہے $\frac{\pi (پ + ق)}{۸ پ ق}$



نواں باب

خاص منحنی

۱۱۹۔ جبریہ منحنی جو ایک تشاکل کا محور رکھتے ہیں۔

ما = ف (لا) (۱)

کے نمونہ کے جبریہ منحنیات کو مرتسم کرنیکے طریقوں کی توضیح اس کتاب کے مختلف حصوں میں کی گئی ہے جہاں ف (لا) منطق تفاعل تھا اور ان تریبی طریقوں میں متقاربوں، اعظم اقل معینوں اور نقاط انعطاف کا دریافت کرنا بھی شامل تھا۔ (دیکھو دفات ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶)

عام طور پر جبریہ منحنیات کا مطالعہ اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن

لما = ف (لا) (۲)

کے منحنیات کی بحث میں کچھ جگہ وقف کر دینا سودمند ہوگا۔

اس مساوات سے لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی لیکن مختلف علامت قیمتیں ملتی ہیں، اس لئے منحنی محور لا کے گرد متشاکل ہے۔ نیز چونکہ ما لازماً مثبت ہے اس لئے لا کی ان سمتوں کے اندر (اگر ایسی موجود ہوں) جن کے لئے ف (لا) منفی ہے منحنی کا کوئی حقیقی حصہ نہیں ہو سکتا۔ مثلاً اگر ف (لا) میں ایک مساویہ جزو ضربی لا۔ لا شامل ہوتا ہے اور اس لئے مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

ما = (لا - لا) ف (لا) (۳)

تو بائیں جانب کا رکن علامت بدلتا ہے میسے لا، لا کی قیمت میں سے گزرتا ہے۔ اس لئے (لا، لا) کے ایک جانب معین خیالی ہے۔

$$\text{نیز اس نقطہ پر } \left(\frac{\text{مف لا}}{\text{مف لا}} \right)^2 = \frac{\text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{فلا}}{\text{لا} - \text{لا}}$$

اور اس لئے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \infty$ ، اس لئے حماس ولا پر عمود وار ہے۔

اگر برعکس اسکے ف (لا) دوہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{لا} = \left(\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} \right)^2 \text{ فلا} \dots \dots \dots (۴)$$

تو بائیں جانب کا جملہ علامت نہیں بدلتا جبکہ لا قیمت لا میں سے گزرتا ہے۔

اس لئے معین نقطہ (لا، لا) کے دونوں جانب حقیقی ہے یا دونوں جانب خیالی۔ پہلی صورت میں نقطہ زیر بحث میں سے نغنی کی دو شاخیں ہیں جو ایک زاویہ پر قطع کرتی ہیں اور ایک ”عقدہ“ بناتی ہیں۔ دوسری صورت میں (لا، لا) طریق پر اکیلایا ”فروج“ نقطہ ہے۔ عقدہ پر حماسی خطوط کی سمتیں حسب ذیل حالت ہوتی ہیں

$$\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \right)^2 = \frac{\text{نلا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \text{فلا} \dots \dots \dots (۵)$$

اگر ف (لا) تھکرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{لا} = \left(\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} \right)^2 \text{ فلا} \dots \dots \dots (۵)$$

تو بائیں جانب کا جملہ نقطہ (لا، لا) پر علامت بدلتا ہے۔ پس اس نقطہ کے

ایک جانب نغنی خیالی ہے۔ نیز چونکہ $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$ اس صورت میں صفر ہے نغنی

عمود کو مس کرتا ہے۔

یہاں چند مثالیں دیکھائی ہیں۔ ابتدا میں ایسی صورتیں ہیں جن میں ف (لا) صیح اور نطق بھی ہے۔

مثال ۱۔ جس صورت میں ف (لا) پہلے یا دوسرے درجہ کا ہے مثلاً

$$\text{م}^{\text{أ}} = \text{ا} + \text{ب} \quad \text{م}^{\text{أ}} = \text{ا}^{\text{أ}} + \text{ب}^{\text{أ}} + \text{ج} \dots \dots (٦)$$

تو نسخی ایک مغرو ملی ہے جس کا محور لا صدری محور ہے۔

مثال ۲۔ - (کعبی منحنیات)

$$6^{\circ} = 1^{\circ} + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + \dots + 6^{\circ} \quad (4)$$

میں بعض دلچسپ صورتیں شامل ہوتی ہیں۔

(۱) اگر مائیں جانب کے خلی اجزاء سے نرسری تھقی اور الگ الگ ہوں تو اس مساوا

کوئیوں لکھا جاسکتا ہے

وَمَا' (لا - عا) (لا - با) (لا - جا) (ا)

اور یہ فرض کر لینے سے عمومیت کم نہیں ہو جاتی کہ ارشیت ہے اور عہد بہ عہد

لا > عہ کے لئے اور بہا > لا > جہ کے لئے معین خیالی ہیں۔ (عہا۔)

اور (بہ) کے درمیان ما کی اعظم قیمت ہے۔ اسلئے منحنی ایک بند طبقہ اور ایک

لا انتہا شلخ پر مشتمل ہے۔ لاکھوں بڑی مہیتوں کے لئے

$$\left(\frac{w}{y} - 1\right)\left(\frac{w}{y} - 1\right)\left(\frac{w}{y} - 1\right)\frac{y}{y} = \frac{r}{r}$$

یعنی بخشنی، لا کے محور پر تقریباً عمود وار ہونے جانیکا میلان رکھتا ہے۔

(ب) اگر (ء) کے بائیں طرف کا جملہ صرف ایک حقیقی جزو ضربی رکھتا ہو تو ساوا

کو یوں لکھا جاسکتا ہے

أما = (لا - ص) (لا + ي + لا + ق) (4)

جہاں پ' > ہ ق۔ اس صورت میں منحنی محور کا سے صرف ایک دفعہ

- 40

(ج) شکل (۸) سے شکل (۹) میں گذر دو طرح سے عمل میں آتا ہوا فیماں کیا جاسکتا ہے۔

ایک نقطہ نظر یہ ہے کہ عہد، بہا، جہا میں سے بڑی دو قیمتوں کے مل جانے سے

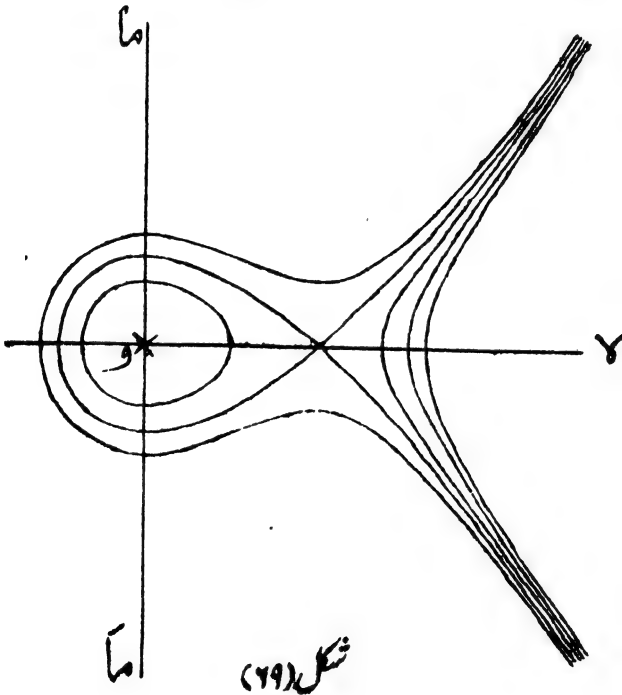
یہ خاص صورت پیدا ہو یعنی

و ما = (لا - عن) (لا - بي) (١٠).

یہاں Δ \leq Δ کے لئے مآخیالی ہے اور $\Delta < \Delta$ کے لئے حقیقی ہے لیکن $\Delta = \Delta$ کے لئے یہ صفر ہوتا ہے۔ نقطہ Δ 'یہاں عقدہ ہے۔ اسے یوں خیال کیا جاسکتا ہے کہ پہلی صورت کے حلقہ اور لامتناہی شاخ کے ملنے سے یہ پیدا ہوا ہے۔ (۵) اگر Δ ، Δ ، Δ میں سے درجہ اولی قیمتیں مل جائیں تو

$$\Delta = \Delta = (\Delta - \Delta) = (\Delta - \Delta) \dots \dots \dots (۱۱)$$

$\Delta > \Delta$ کے لئے مآخیالی ہوگا سوائے $\Delta = \Delta$ کے جبکہ یہ صفر ہوگا اس صورت میں نقطہ Δ 'اکیلا نقطہ ہے۔ ایسا خیال کیا جاسکتا ہے کہ صورت اول کے حلقہ کے معدوم ہو جانے سے یہ شکل پیدا ہوتی ہے۔



ان تمام صورتوں کی شکل (۶۹) میں توضیح کی گئی ہے۔ دائیں جانب سے شروع ہو کر نمونہ (۶۹) کا ایک منحنی ملتا ہے جو ایک اکیلا لامتناہی شاخ پر مشتمل ہے۔

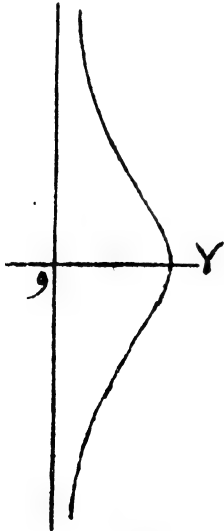
(ع) نہایت ہی خاص صورت میں جبکہ تینوں مقداریں $ع$ ، $ب$ ، $ج$ میں منطبق ہو جائیں تو

لے $ما = (لا - ع)$ (۱۳)
 اس صورت میں منحنی "نیم کروی" کہلاتا ہے۔ اس کے $(ع، ب)$ پر ایک قرن ہے۔
 اسے عقدہ کی انتہائی شکل خیال کیا جاسکتا ہے جو عقدہ کے معدوم ہو جانے سے پیدا
 ہو سکتی ہے۔ دیکھو شکل ۷۰، جہاں $ع = ب$ ۔

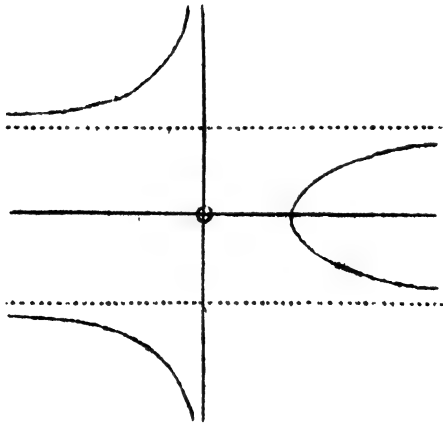
اگر مساوات (۲) میں $ف (لا)$ منطبق ہو کر صریح نہ ہو تو نسب نما کی حقیقی اصول
 سے (اگر کوئی ہوں) متقارب ملیں گے جو محور $ما$ کے متوازی ہونگے بشرطیکہ $لا$ کی
 ایسی قیمتوں کے لئے جو ان اصولوں سے بہت کم تفاوت ہوں $ما$ مثبت ہو۔

مثال ۳ - $\frac{ما}{لا} = \frac{لا - ۱}{لا}$ (۱۳)

محور $ما$ متقارب ہے، نیز $لا$ کی بڑی قیمتوں کے لئے $ما = \pm لا$ تقریباً $لا = ۰$ ۔
 اور $لا = ۱$ کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ حقیقی نہیں۔ دیکھو شکل ۷۱۔



شکل (۷۰)



شکل (۷۱)

مثال ۴ - $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a-b}{a}$ (۱۴)

لا منفی کے لئے اور لا > کے لئے ما خیالی ہے۔ دیکھو شکل ۴۔

اس منحنی کو اگنیسی کی ڈائن (Witch of Agnesi) کہتے ہیں۔

مثال ۵ - $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+b}{b-a}$ (۱۵)

مبدأ پر عقدہ ہے اور منحنی محور کا کو دو بارہ (-۱، ۱) پر کاٹتا ہے۔ اگر

لا < ب یا لا > - ۱ تو ما خیالی ہوتا ہے۔ خط لا = ب

تقارب ہے۔ دیکھو شکل ۵۔

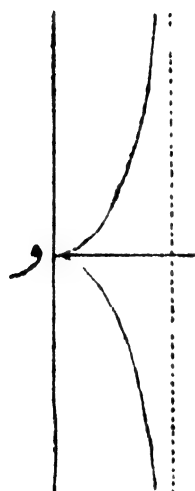
مثال ۶ - $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b-a}$ (۱۶)

یہ مسادات (۱۵) میں ۱ کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

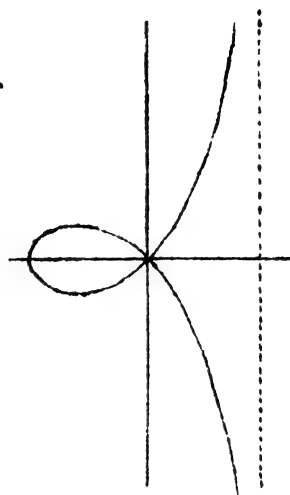
حلقہ اس صورت میں قرن ہو جاتا ہے شکل ۶۔ اس کو بسلابی خط

(Cisoid) کہا جائے گا۔

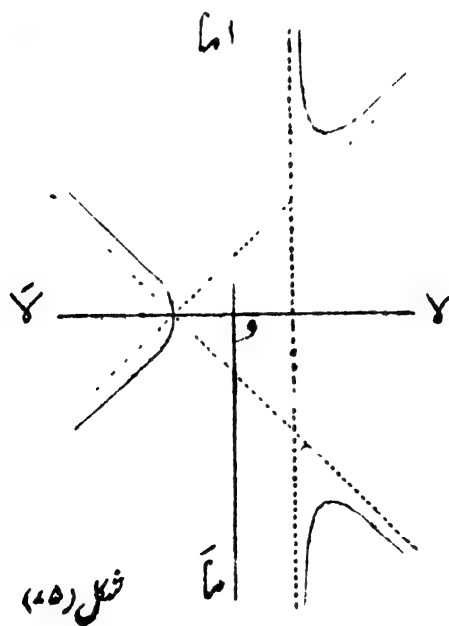
اشکال ۳ و ۴
 اگلے صفحہ
 پر
 ہیں۔



شکل (۴۳)



شکل (۴۴)



شکل (۴۵)

۲۹۰۔ مثال ۷۔ $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda + 1} + \frac{1}{\lambda - 1}$ (۱۷)

چونکہ ما خیالی ہے جبکہ $\lambda < 1$ ۔ $\lambda > 1$ ہوا ہے اس صورت کے جبکہ $\lambda = 1$ ۔ مبداء اکیلا نقطہ ہے۔ مائل متقارب دریافت کر نیکی لئے

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + 1} = \frac{1}{\lambda - 1} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) \pm = \left(\frac{1}{\lambda - 1} \right) \pm = \frac{1}{\lambda}$$

$$(18) \dots\dots\dots \left(\dots\dots + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + 1 \right) \pm =$$

اس لئے خطوط $\lambda = 1$ (۱۹) متقارب ہیں۔ شکل ۷۔

۱۲۰۔ ماورائی مخنی - زنجیرہ - خطہ بکھتری (Tractrix)

اب چند مشہور مخنیاں پر بحث کی جائے گی جو اکثر ماورائی ہیں اور بن کی تعریف اس نمونہ کی مساواتوں سے کی جاتی ہے جن کا α دفعہ ۶۱ میں دیا گیا ہے۔
یعنی $\lambda = 1$ (فما (ت) 'ما = خصا (ت)

جہاں ت بدلنے والا متبدل ہے۔
جو شکل ایک بچیاں زنجیرہ یا ذبہ ارض کے ماتحت آزادانہ طور پر لٹکنے سے اختیار کرتی ہے اسے ہم زنجیرہ (Catenary) کہتے ہیں۔

سکونیات کے ابتدائی اصولوں کی مدد سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے نچلے نقطہ (ل) سے شروع ہو کر زنجیرہ پر کے کسی نقطہ پ تک کا قوسی طول ہی ہو اور پ پر کے ماس کا افق کے ساتھ میلان مسا ہو تو

$$m = \frac{1}{\lambda} \text{ مسا } \dots\dots\dots (2)$$

جہاں λ مستقل ہے۔ اس لئے اگر $\lambda = 1$ ، ما افقی اور اتصالی محدود ہوں تو

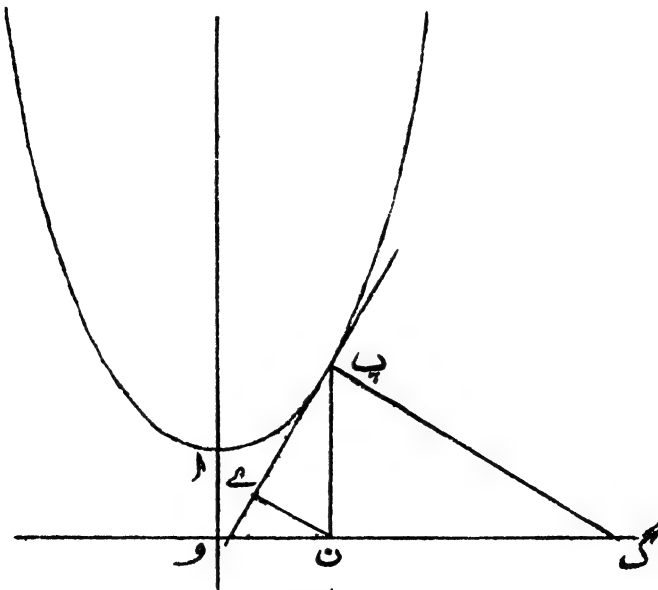
$$\left[\begin{aligned} \frac{فرلا}{فرسا} &= \frac{فرلا}{فرس} \times \frac{فرس}{فرسا} = \text{جم سا} \times \frac{وقط سا}{وقط سا} \\ \frac{فرما}{فرسا} &= \frac{فرما}{فرس} \times \frac{فرس}{فرسا} = \text{جب سا} \times \frac{وقط سا}{وقط سا} \end{aligned} \right]$$

(۳)

تکمل کرنے سے (۱) = ولوک مس (۲/۳ + ۱/۳) = ۱ = وقط سا (۴)

مستقل حذف کر دینے سے یہ مراد ہے کہ مبدأ کو کسی خاص نقطہ پر لیا گیا ہے جس کا اہمک تعین نہیں کیا گیا تھا۔ چونکہ ضابطہ (۴) سے (۱) = ۱ اور ۱ = ۱ جبکہ سا = ۱۔ اس لئے ظاہر ہے کہ مبدأ نقطہ ۱ کے انتصاف یا محی فاصلہ ۱ پر واقع ہے۔ (۴) سے کارٹیزی مساوات باسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

۲۹۱



شکل (۶)

$$\frac{۱}{۲} = \text{لوگ مس} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) = \text{لوگ} (\text{قط سا} + \text{مس سا})$$

$$(۵) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{جس سے} \text{قط سا} + \text{مس سا} = \text{فو} \frac{۱}{۲} \\ \text{قط سا} - \text{مس سا} = \text{فو} \frac{۱}{۲} \end{array} \right.$$

اس لئے جمع اور تفریق سے

$$(۶) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ما} = \text{قط سا} = \frac{۱}{۲} (\text{فو} \frac{۱}{۲} + \text{فو} \frac{۱}{۲}) = \text{اجمن} \frac{۱}{۲} \\ \text{مس} = \text{اس سا} = \frac{۱}{۲} (\text{فو} \frac{۱}{۲} - \text{فو} \frac{۱}{۲}) = \text{اجمن} \frac{۱}{۲} \end{array} \right.$$

بعض اور خاصیتیں شکل سے باسانی حاصل ہوتی ہیں۔ اگر پان میں ہو

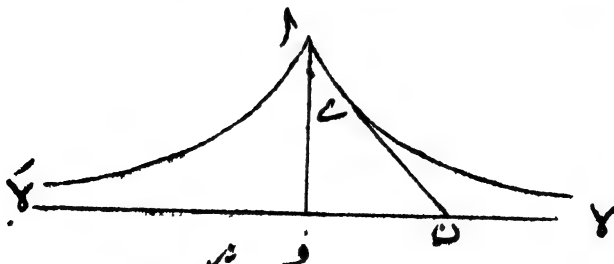
پات ماس، پگ غاد اور ن سے پایہ سے ماس پر مین تو
ن سے = ماس سا = اس سا = اس سے = اس سے = اس سے

چونکہ پ سے زنجیر کی قوس کے مساوی ہے، اس لئے یہ ظاہر ہے کہ
ن سے کا اگلا متصل مقام سے ن کے اندر ہے، دوسرے الفاظ میں ن سے

۲۹۲

سے کے طریق کا ماس ہے۔ اس لئے اس طریق یا نمونی کی خصوصیت یہ ہے کہ
اس کا ماس سے ن مستقل ہوتا ہے۔ اس نمونی کو خط جستی کہتے ہیں۔

اور وہ اس لئے کہ یہ ایک ذریعہ کا لاستہ یا کوس ہے جسکو ری کے ذریعہ ایک کھدور سے
افقی ستوی پر کھینچا جائے جبکہ اسی کا دوسرا سران ایک خط مستقیم (۷۶) متر م کرے۔



شکل (۷۷)

منحنی کے نقطہ λ پر ایک قرن ہے اور محور λ اس کا متقارب ہے۔
 اس منحنی کی اور خاصیتیں اس کے حماس کے (طول میں) مستقل ہونے کی
 بنا پر حاصل ہو سکتی ہیں۔ مثلاً چونکہ اس کے دو متصل حماس ایک دوسرے کے ساتھ
 زاویہ صفر مسا بناتے ہیں اس لئے حماس جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس تکملہ
 $\frac{1}{2} \pi$ اور فرسائے حامل ہوتا ہے جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان
 لیا جائے۔ اس طرح منحنی اور متقارب کے درمیان کا کل رقبہ $\frac{1}{2} \pi$ اس کے
 مساوی ہے۔

۱۲۱۔ لیسازو کے منحنی (Lissajous' Curves)۔ یہ منحنی

علم آواز میں خاص اہمیت رکھتے ہیں اور دوسراہ موسیقی حرکتوں کے ترکیب
 دینے سے جو علی القواہم سمتوں میں ہوں یہ منحنی پیدا ہوتے ہیں۔ انہیں اس طرح
 تعبیر کیا جاسکتا ہے

$\lambda = \text{اجم (ن ت + صہ)}$ ، $\mu = \text{اجم (ن ت + صہ)}$ (۱)۔
 نیز یہ ظاہر ہے کہ مقداروں صہ، صہ میں سے ایک کو کوئی مناسب
 قیمت دیدی جاسکتی ہے کیونکہ اس کے معنی یہ ہیں کہ وقت کے بعد کا خاص انتخاب
 کیا گیا ہے۔

جس صورت میں دور $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ متوافق ہوں تو ت کے انقطاع سے
 λ ، μ میں جبریہ ربط مل سکتا ہے۔

مثال ۱۔ جس صورت میں $\lambda = \text{ن}$ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$\lambda = \text{اجم (ن ت + صہ)}$ ، $\mu = \text{اجم (ن ت + صہ)}$ (۲)۔

جس سے $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\text{اجم صہ}}{\text{اجم صہ}} = \text{جب ن ت جب صہ}$ ،
 $\frac{\lambda}{\mu} = \text{جب صہ} = \text{اجم ن ت جب صہ}$

مرکز اٹھانے اور جمع کرنے سے ملتا ہے

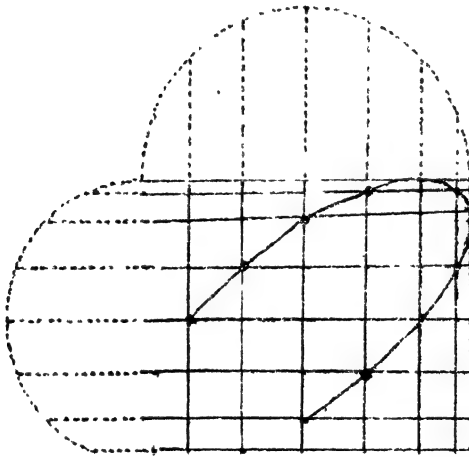
$$\frac{a^2}{a^2} - \frac{2ab}{ab} + \frac{b^2}{b^2} = \text{جب } ص = ۰ \dots \dots (۳)$$

یہ قطع ناقص ہے۔ خاص صورت میں جبکہ $ص = ۰$ یا $ص = \pi$ قطع ناقص بگڑ کر
ایک خط مستقیم

$$\frac{a}{a} \pm \frac{b}{b} = ۰ \dots \dots (۴)$$

بن جاتا ہے۔

اگر ورٹیکل طر پر مساوی نہ ہوں تو شکل مرتسمہ کو قطع ناقص خیال کیا جاسکتا ہے
ہے جو دو ترکیبی مرکزوں کی اضافی ایڑیت سے حصہ کے مسلسل بدلنے سے بدیہی اپنی شکل بدلتا ہے۔



شکل (۷۸)

جب قطع ناقص (۲) کو اسکے صدی محوروں کی طرف منسوب کیا جاتا ہے تو متحرک نقطہ کے
محدویہ شکل اختیار کرتے ہیں

لا = (بجم) (ن ت + صہ) ، ما = ب جب (ن ت + صہ) (۵)
 ن ت + صہ کی تطبیق ہم خروج المکرز زاویہ کے ساتھ کرتے ہیں اور چونکہ ن ت + صہ
 وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا) (ما) ایک ایسے نقطہ کے
 قائم ظل کی طرح حرکت کرتا ہے جو نیم قطر کا دائرہ مستقل زفاران لار کے ساتھ مترتم
 کرے۔ چونکہ دائرہ سے ناقص میں بدلنے کے لئے کوئی لامتناہی چھوٹا و زرائی نسبت سے
 ہوتا ہے جس نسبت سے کہ متوازی نیم قطر اسلے معلوم ہوتا ہے کہ ناقصی حرکت میں کسی
 نقطہ پیر کی زفاران \times ج ۵ ہوگی جہاں ج ۵ ج ۵ کا مزدوج نیم
 قطر ہے اور ج ۵ مرکز ہے۔

اسس کو "ناقصی موسیقی" کہتے ہیں۔

مثال ۲۔ اگر $n = 2$ تو لکھو

(۶) لا = (بجم) (ن ت + صہ) ، ما = ب جم (۲ ن ت + صہ)
 اس صورت میں ما اپنے دور میں سے دگنی تیز زفاران سے گزرتا ہے اور نقطہ
 (۷)۔ (بجم صہ) دوم مرتبہ عبور ہوتا ہے جیسے ن ت بقدر ۲۲ کے بڑھتا ہے۔
 اسلے نامنہنی بالعموم دو علقوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

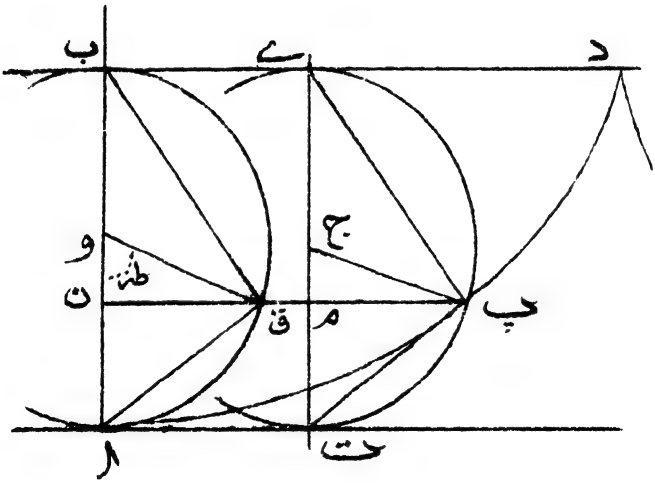
جبکہ صہ = $\pm \frac{n}{2}$ تو نامنہنی دونوں محوروں کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے (دیکھئے
 مساوات یہ ہوتی ہے

ما = $\frac{لا}{۲} = ۲ (۱ - \frac{لا}{۲})$ (۷)
 جب صہ = ۰ یا π تو نامنہنی گہرا کر مکانی کی ایک توس بن جاتا ہے

ما = $\pm (۲ - \frac{لا}{۲}) (۱ - \frac{لا}{۲})$ (۸)
 جب دونوں کا باہمی رابطہ بالکل ٹھیک نہیں ہوتا تو نامنہنی ان دو مکانی توسوں کے
 درمیان بطور انتہائی شکلوں کے امتزاج کرتا ہے۔

* شکل ۸ میں لیسازوس کے جسمی بنانے کے طریقہ کی نشان دہی کی گئی ہے۔ اس میں استعابی اور جسمی خطوط
 ہیں جو مختلف مساوی دائروں کے مساوی افضل نقطوں میں سے کیچنے کے ہیں اور ان سے وقت کے
 مساوی وقفے تعمیر ہوتے ہیں۔
 ان نتیجہات کو کھینچنے کی کئی مناظری ادیتیں ترکیبیں ہیں ان کے بیان اور کچھ مختلف نمونوں کے
 متعلق تجربی علم و ادراک کی کتابوں کی طرف رجوع کیا جائے۔

۱۲۲۔ خط تدویر۔ خط تدویر وہ منحنی ہے جو ایک دائرہ کے محیط پر کا کوئی نقطہ مرتسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہو۔ ظاہر ہے کہ یہ منحنی بیشمار حصوں پر مشتمل ہو گا جو ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہونگے اور جن میں سے ہر ایک حصہ دائرہ کے ایک پورے دور کو تعبیر کریگا۔ شکل ذیل میں ۱ جیسے نقطے جہاں منحنی ثابت خط مستقیم یا قاعدہ ب د سے دور سے دور ہے راس کہلاتے ہیں، متواتر راسوں کے درمیان کے نقاط جیسے د جہاں منحنی قاعدہ سے ملتا ہے ”قرن“ (Cusp) کہلاتے ہیں، خط ۱ ب کو جو ایک راس میں سے گذرتا ہے اور قاعدہ پر عمود وار ہے منحنی کا محور کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ یہ خط اشکال کا محور ہے۔



شکل (۹۹)

محور ۱ ب کو قطر مان کر جو دائرہ بنایا جائے اسکو حوالہ کا دائرہ ماننا مناسب ہو گا۔ فرض کرو کہ لڑکنے والے دائرہ کا کوئی اور مقام سے پ ت ہے قاعدہ کے ساتھ نقطہ تماس ہے، مرکز ج ہے، میں سے گذرینوالے

قطر کا مقابل کا سرایت ہے اور مرسم نقطہ کا مقام پ ہے۔ پ مر
کو قاعدہ کے متوازی کھینچو کہ یہ ت سے سے مر پر ا ب سے ن پر اور
حوالہ کے دائرہ سے ق پر ملے۔ اگر ا ب اور ا ب کو بالترتیب لا
اور م کے محور مانا جائے تو پ کے محدد ہونگے

لا = ن پ = پ بے + م پ، ما = ل ن = ج ت - ج م
فرض کرو کہ لڑکے والے دائرہ کا نیم قطر ا ہے اور ط م وہ زاویہ
(پ ج ت) ہے جس میں سے یہ دائرہ گھومتا ہے جیسے مرسم نقطہ (سے
پ تک سفر کرتا ہے۔ اس طرح ب بے = ا ط م، پ م
= ا جب ط م، ج م = ا جم ط م اس لئے

لا = ا (ط م + جب ط م) ما = ا (ا - جم ط م) (۱)
ان مساواتوں سے نمونی کے تمام خواص حاصل ہوتے ہیں۔
اگر ماس کا میلان ا ب کے ساتھ یا عماد کا ب ا کے ساتھ مساوی

$$\text{تو مس مسا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جب ط م}}{\text{ا جم ط م}} = \text{مس} \frac{\text{ط م}}{۲}$$

جس سے مسا = $\frac{\text{ط م}}{۲}$ (۲)

چونکہ زاویہ ت بے پ نصف ہے زاویہ ج ت ج پ کا اسلئے
بے پ نمونی کے نقطہ پ پر عماد ہے اور پ ت ماس - مقابلہ کرو
دفعہ ۶۴ کے ساتھ ہیجے۔

نمونی کی قوس (نس) معلوم کرنے کے لئے

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط م}} \right) + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرط م}} \right) = \text{ا} [\text{ا جم ط م} + \text{جب ط م}] = \text{ا جم ط م} \frac{\text{ط م}}{۲}$$

اس لئے دفعہ ۱۱ کی مدد سے مس = $\text{ا جم ط م} \frac{\text{ط م}}{۲}$ فرط م = $\text{ا جم ط م} \frac{\text{ط م}}{۲}$

یا سا کی رقوم میں $س = ۴$ جب سا (۳)
کوئی مستقل جمع کرنے کی ضرورت نہیں اگر س کا مبدأ ۱ پر لیا جائے۔
علم حرکت میں یہ رشتہ ضروری ہے۔

چونکہ $ت پ = ت$ جب سا اس لئے

نوس $ا پ = ۲$ $ت پ = ۲$ و $ا ق$ (۴)
بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک قوس کا طول ۱۸ ہے۔

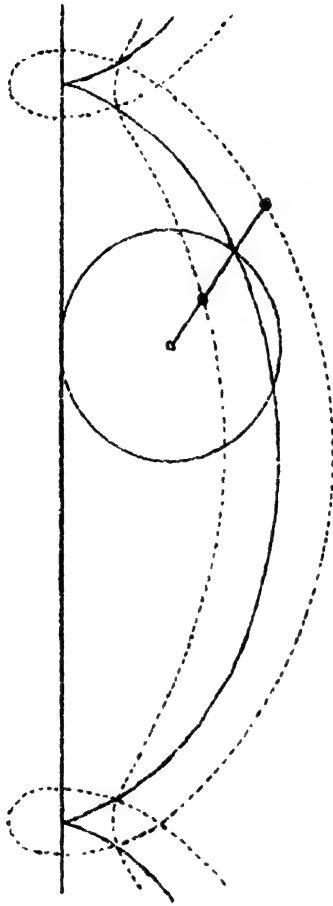
اگر رکھا جائے $ما = ۷$ $م = ۱$ $(۱ + جم ط)$ (۵)
تہ منحنی اور تاعدہ کے درمیان رقبہ

$$= \int_0^1 (1 + جم ط) دز ط = ۴ \int_0^1 جم ط دز ط$$

$$= ۱۸ \int_0^1 جم ط دز ط$$

۲۹۶ اس تکملہ کو عدد $\frac{\pi}{4}$ کے درمیان لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ رقبہ
جو تاعدہ اور منحنی کے ایک محراب کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ کون دائرہ
کے رقبہ کا تین گنا ہے۔

اگر ایک دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑ کے تو کوئی نقطہ جو بلحاظ دائرہ
کے ثابت ہو اثناء حرکت میں ایک منحنی طے کرے گا جسے ہم استدار
خط یا منحنی استداری (Trochoid) کہیں گے۔



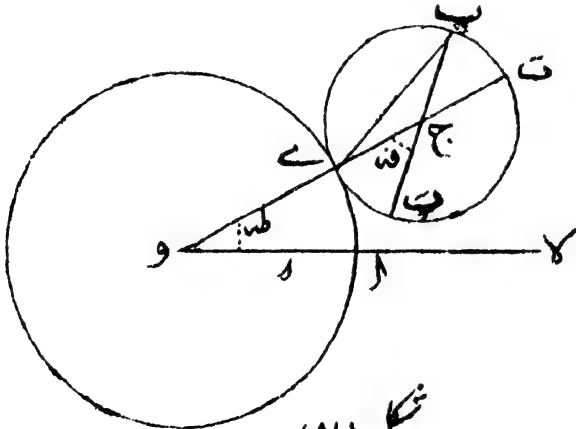
شکل (۸۰)

شکل ۹ میں اگر ہم تقطیع قطر ج پ کے اندر مرکز سے فاصلہ ک پر ہو تو اس کے محدود ہونے

(۶) $\lambda = \lambda ط + \lambda ک$ جب $\lambda ط = \lambda ا = \lambda ک$ جم ط (۶)
 جب $\lambda ک < \lambda ط$ تو حلقے پیدا ہوتے ہیں جو (ک = ا) کی خاص صورت
 میں بگڑ کر قرن ہو جاتے ہیں۔ جب $\lambda ک > \lambda ط$ تو منحنی قاعدہ سے نہیں ملتا۔

شکل ۸۰ میں صورتیں گ = $\frac{1}{2}$ اگ = $\frac{1}{3}$ اگ = $\frac{1}{4}$ دکھائی گئی ہیں۔
 (۶) سے یہ آسانی ثابت ہوتا ہے کہ استدار کے کسی نقطہ پر کاغذ لڑکے
 والے دائرہ کے نقطہ تماس کے متناظر محل میں سے گزرتا ہے مثلاً کہ وہ $\frac{1}{4}$ کے ساتھ۔
 ۱۲۳۔ برتدویر اور درتدویر۔ ایک ثابت دائرہ پر ایک دائرہ اگر گھمے
 سو خزانہ کرے محیط پر کا کوئی نقطہ اتنا ہے حرکت میں جو طریق فرض کرتا ہے اسے ہم
 برتدویر (Epicycloid) کہینگے اگر حرکت دائرہ ثابت دائرہ کے باہر واقع ہو اور
 درتدویر (Hypocycloid) کہینگے اگر یہ اندر واقع ہو۔ جن برتدویروں میں
 لڑکے والا دائرہ ثابت دائرہ کے پورا گرد آجاتا ہے انہیں امتیازی خطا طر گریز
 تدویر (Pericycloid) کہا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ثابت دائرہ کا مرکز ف سے اور لڑکے والے دائرہ کا مرکز کسی مقام میں
 ج ہے نقطہ تماس م سے ہے اور مرکز نقطہ پ ہے۔ نیز فرض کرو کہ قطرب ج پ
 کا دوسرا سرچپ ابتدا میں نقطہ ا پر تھا۔ ہم معیاری صورت وہ لینگے جس میں لڑکے
 والا دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہے۔ فرض کرو کہ
 وا = ا ج پ = ب ا = اے وا = ط ا = ج پ = ف ا



شکل (۸۱)

ج ب کا میلان و ا کے ساتھ طہ + فہ ہے اگر د کو محور دں کا مبدأ اور و ا کو محور لا مانا جائے تو قائم ظل سے ج ب کے محدود حاصل ہوتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = (ا + ب) جم طہ + ب جم (طہ + فہ) \\ ما = (ا + ب) جب طہ + ب جب (طہ + فہ) \end{array} \right. \dots (۱)$$

یا چونکہ ا طہ = قوس اے = قوس جے = ب ذہ (۲)

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = (ا + ب) جم طہ + ب جم \frac{ا + ب}{ب} طہ \\ ما = (ا + ب) جب طہ + ب جب \frac{ا + ب}{ب} طہ \end{array} \right. \dots (۳)$$

نقطہ جے جس بر تدویر کو قسم قسم کرتا ہے وہ دوسری رقموں کے سر و ن میں ب کی علامت بدلنے سے ماثل ہوتا ہے یعنی

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = (ا + ب) جم طہ - ب جم \frac{ا + ب}{ب} طہ \\ ما = (ا + ب) جب طہ - ب جب \frac{ا + ب}{ب} طہ \end{array} \right. \dots (۴)$$

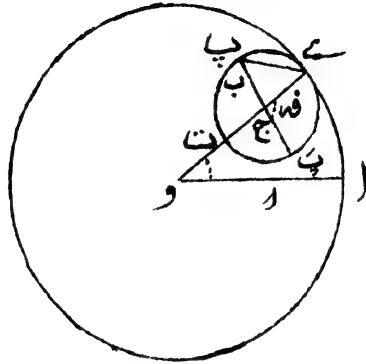
نقطہ ا پر اس کا ایک قرین ہے۔

اوپر کی مستند صورتیں دائرہ اے پر کے خاص کے مقابل جانبوں میں واقع ہوتی ہیں۔ اگر یہ ایک ہی طرف واقع ہوں جیسا کہ گرد تدویر اور در تدویر کی صورت میں تو فقط جے کی علامت کو تمام ضابطہ میں بدل دینا چاہئے۔ اس طرح (۳) کے ماثل ضابطہ ملتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = (ا - ب) جم طہ - ب جم \frac{ا - ب}{ب} طہ \\ ما = (ا - ب) جب طہ + ب جب \frac{ا - ب}{ب} طہ \end{array} \right. \dots (۵)$$

اسکی تصدیق طالب علم خود کرے۔ دیکھو شکل ۸۲۔ در تدویر میں

ا < ب اور گرد تدویریں ا > ب



شکل (۸۲)

۲۹۹

اسی طرح پ کے طریق کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$(۶) \dots \left\{ \begin{array}{l} (۱) = (ب - ا) \cdot جم + ط + ب \cdot جم = \frac{ب - ا}{ب} ط + ب \\ (۲) = (ب - ا) \cdot جب + ط + ب \cdot جب = \frac{ب - ا}{ب} ط + ب \end{array} \right.$$

بر تدویر کے کسی نقطہ پر ماس معلوم کرنے کے لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے چونکہ $\frac{فص}{ب} = \frac{ا}{ب}$

$$\frac{فص}{ب} = \frac{جم + ط + ب \cdot جم}{جب + ط + ب \cdot جب} = \frac{جم + ط + ب \cdot جم}{جب + ط + ب \cdot جب} = \frac{جم + ط + ب \cdot جم}{جب + ط + ب \cdot جب} \dots (۷)$$

شکل ۸۲ کے حوالہ سے معلوم ہو گا کہ $\frac{فص}{ب}$ سے پ کا میلان ہے

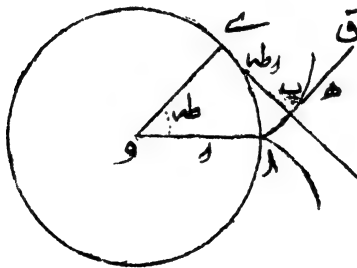
و ا کے ساتھ۔ اس لئے سے پ بر تدویر کا پ پر عا د ہے۔ اسی طرح کا نتیجہ گرد تدویر اور در تدویر کے لئے مساواتوں (۵) سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مقابلہ کرد دفعہ ۴۶ کے ساتھ۔

خط کہا جائیگا بموجب اسکے کہ نقطہ باہر ہو یا اندر۔ اگر مرسم نقطہ کا فاصلہ لڑکنے والے دائرہ کے مرکز سے کہ ہو تو مختلف صورتوں میں محدود یا لا، ما کے لئے چلے دوسری رقوم کے (صرف) سروں میں ب کی بجائے گ لکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۴۔ خاص صورتیں۔ (۱) اگر ثابت دائرہ کا نیم قطر لا انتہا بڑا ہو تو

واپس تدویر کی صورت پر ہم آجاتے ہیں۔ دفعہ ۱۲۳ (۱) سے متناظر مساواتیں باسانی حاصل ہوتی ہیں اگر لا کی بجائے لا + ا اور ا طہ = ب فہ اور (آخر الامر) طہ = ل کہا جائے۔

(۲) اس کے بعد لڑکنے والے دائرہ کے نیم قطر کو لا انتہا بڑا بنانے سے ایک ایسے خط مستقیم کے کسی نقطہ کا طریق ملتا ہے جو ایک ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے اس تعریف کے مطابق جو منحنی ملتا ہے اسے ہم دائرہ کا درجیدہ (Involute) کہیں گے۔ دیکھو دفعہ ۱۲۴۔ اسکی مساواتیں دفعہ ۱۲۳ (۴) کی انتہائی صورت کے طور پر معلوم ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ شکل سے فوراً لکھی جاسکتی ہیں۔



شکل (۸۳)

ہمیں شکل سے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = اجم طہ + ا طہ جب طہ \\ ما = اجم طہ - ا طہ جب طہ \end{array} \right. \quad (۱) \dots \dots \dots$$

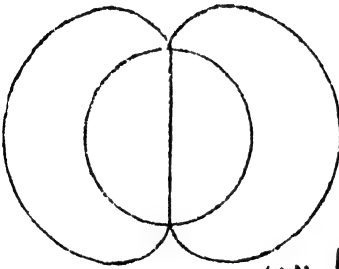
اس کے متناظر استدارنی مخنی ہے

$$\begin{aligned} \lambda &= (1+h) \text{ جم } ط + 1 ط \text{ جب } ط \\ \mu &= (1+h) \text{ جب } ط + 1 ط \text{ جم } ط \end{aligned} \quad \dots \dots (2)$$

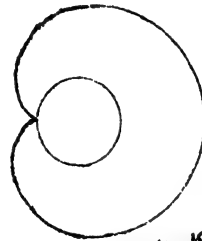
جہاں شکل میں $h = 1$ اور q مرسم نقطہ ہے۔ خاص صورت $h = 1$ سے آرٹیمیدس کا لوہب حاصل ہوتا ہے دیکھو دفعہ ۱۲۶۔

(۳) اگر نیم قطر 1 ب متوافق ہوں تو گردشوں کی کسی پوری تعداد کے بعد مرسم نقطہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آئے گا اور اس کے بعد اس کا راستہ اس کے پرانے طریق پر منطبق ہوگا۔ ایسی صورت میں مخنی جبریہ ہوتا ہے کیونکہ λ ، μ کے لئے جو حل حاصل ہوتے ہیں ان سے منطقی تفاعل ساقط ہو سکتے ہیں۔ بعض صورتوں میں مساوات کی قطبی شکل زیادہ سہولت بخش ہوتی ہے۔

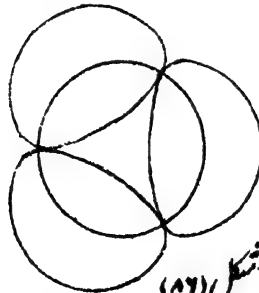
۳۰۱



شکل (۱۱۵)



شکل (۱۱۶)



شکل (۱۱۷)

اشکال ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶ میں 'بر' اور 'مدر' تدویریں دکھائی گئی ہیں جن میں لکے گئے

۳۲

نقطہ (گ۔ ک) کو قطب ماننے سے یہ ضابطہ اس مساوات کے معادل ہیں

$$r = (1 + k \text{ جم طما}) \dots \dots \dots (5)$$

 جو گہونگا منہجی (Limapon) کی قطبی مساوات ہے (دفعہ ۱۲)۔ یہ مساوات بھی
 بآسانی ہندسی طریق پر حاصل ہو سکتی ہے۔
 مثال ۲۔ ایک دائرہ اپنے سے دگنے نصف قطر والے دائرہ کے اندر لٹکتا ہے۔
 ۱۲۳ (۶) میں رکھو۔ $b = \frac{1}{4} r$ تو حاصل ہوگا

$$r = 4 \text{ جم طما} \dots \dots \dots (6)$$

 یعنی لڑکنے والے دائرہ کے محیط پر کا مرسم نقطہ ثابت دائرہ کا ایک قطر مرسم کرتا ہے۔
 نیز متناظر استدارائی نمبری ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$r = (b + k) \text{ جم طما} \dots \dots \dots (7)$$

 اور یہ قطع ناقص ہے جس کے نیم محور b $\pm k$ ہیں۔ نیز اگر لڑکنے والے دائرہ
 کی زاویہ رفتار مستقل ہو تو مرسم نقطہ کی حرکت ناقصی موسیقی ہوگی۔

ہندسی تجلیات کی بنا پر بھی یہ نتائج بآسانی حاصل ہوتے ہیں۔ لڑکنے والا دائرہ
 ہمیشہ ثابت دائرہ کے مرکز و میں سے گزرتا ہے اور اگر لڑکنے والے دائرہ کا نقطہ
 b ابتدا میں نقطہ a پر منطبق ہو تو قوس سے $b = قوس$ سے a ۔ اب چونکہ نصف
 قطروں کی باہمی نسبت $a : b$ ہے اس لئے قوس سے b کے سامنے اس کے
 محیط پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہونا چاہئے جو قوس سے a کے سامنے
 اس کے اپنے دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ b اور a سمت میں
 منطبق ہوتے ہیں اور b ثابت قطر و a کو مرسم کرتا ہے۔ نیز چونکہ زاویہ b و a
 زاویہ قائمہ ہے اس لئے لڑکنے والے دائرہ کے قطر b کا دوسرا سر ثابت
 دائرہ کا وہ قطر مرسم کرتا ہے جو a پر علی القوائم ہے۔ اس لئے b a پر مستقل
 طول کا ایک خط مستقیم ہے جس کے سرے دو علی القوائم خطوط مستقیم پر واقع ہوتے
 ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ ان حالات کے ماتحت b a پر کا
 کوئی اور نقطہ قطع ناقص مرسم کرتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۵۴ مثال اس کے ساتھ۔

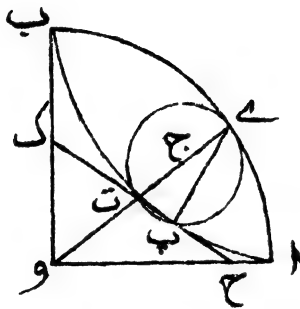
۳۳

$$(۱۰) \dots \dots \dots \begin{cases} ۱۰ = \frac{۳}{۴} \text{ رجب طہ} + \frac{۱}{۴} \text{ جم ۳ طہ} = \text{رجم طہ} \\ ۱۰ = \frac{۳}{۴} \text{ رجب طہ} - \frac{۱}{۴} \text{ جب ۲ طہ} = \text{رجب طہ} \end{cases}$$

جس سے نغنی باسانی ترسم ہو سکتا ہے اسکی کارٹیزی صورت یہ ہے

$$(۱۱) \dots \dots \dots \frac{۶}{۲} = \frac{۶}{۲} + \frac{۶}{۲}$$

بعض اوقات اس نغنی کو ”ستارہ نما“ کہا جاتا ہے اس کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ ایسے
ماس کا طول جو محدودوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہوتا ہے۔ اگر شکل ۸۹
میں مرسم نقطہ پ ہو اور ت پ ماس ہو تو یہ آسانی سے دیکھا جائیگا کہ زاویہ
ج ت پ زاویہ ا و ج کا دو چند ہے اس لئے ج ک = ۱ و ت = ۱
نیز دیکھو شکل ۱۲۵ دفعہ ۱۴۵۔



شکل (۸۹)

۱۲۵۔ دائری حرکتوں کا ایک دوسرے پر انطباق۔ بر دور

تدویری اور استداری نغنی جنکا ذکر دفعات ۱۲۲ تا ۱۲۴
میں کیا گیا ہے ایک اور طرح سے بھی پیدا ہوتے ہیں یہ ایسے لفظوں کے طریق
ہیں جنکی حرکت دو کیساں دائری حرکتوں سے مرکب ہو۔

ایک بازو وق ایک ثابت نقطہ کے گرد مستقل زاوی رفتار
ن کے ساتھ حرکت کرتا ہے، مبدأ میں سے گزرنیوالے قائم محدود پر
اس کے ظل ہونگے

لا = ج جم ن ت ' ما = ج جب ن ت (۱)

جہاں ج = وق بشرطیکہ ت کے مبدأ کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے
اگر ایک اور بازو وق نقطہ کے گرد مستقل زاوی رفتار ن کے ساتھ
گردش کرے اور ایک ہی وقت میں وق کے ساتھ ابتدا محور لا سے
گھومنا شروع کرے تو محوروں پر وق کے ظل ہونگے

لا = ج جم ن ت ' ما = ج جب ن ت (۲)

جہاں وق = ج - اگر متوازی الاضلاع وق پ ق کی تکمیل کی جائے
تو و پ سے وق اور وق کا ہندسی مجموعہ تعمیر ہوگا اور پ سے محدود
ہونگے

لا = ج جم ن ت + ج جم ن ت ' ما = ج جب ن ت + ج جب ن ت

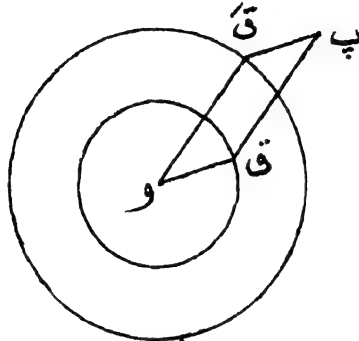
..... (۳)

چونکہ ق پ ہمیشہ وق کے مساوی اور متوازی رہتا ہے اس لئے
پ کا راستہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو بیجا با ایک نقطہ ق کے دائری
مدار میں تقسیم کرتا ہے جبکہ ق خود نقطہ کے گرد بیجاں طور پر دائرے میں
حرکت کرتا ہے۔

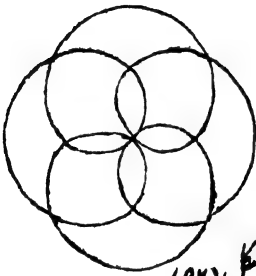
اگر متوازی الاضلاع وق پ ق چار ڈنڈوں کو چولوں کے ذریعہ وصل کرنے سے
بنایا گیا ہو اور اگر وق ' وق کو کے گرد مناسب شجی نے گھمایا جائے تو
و میں سے گزرنے والے کسی ثابت خط سے پ کا فاصلہ دو سادہ موسیقی حرکتوں کو
تعمیر کرے گا جنکے دور $\frac{2\pi}{n}$ ہونگے۔ لارڈ کیلون کی موج گھڑی (Tidal clock) کا یہی اصول

ہے اسکی مدد سے میلی طور پر ہمیشی اور قمری جوار جہاں کا انطباق ایک دوسرے پر عمل میں آتا ہے۔

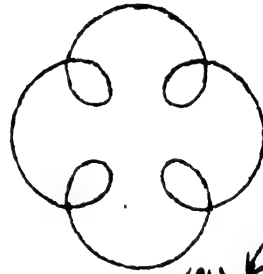
اس طور پر جو نمونی مترم کئے جاتے ہیں، انہیں بر دورے (Epicycles) کہتے ہیں۔ اگر زاویہ رقعہ داروں 'ن' کی ایک ہی علامت ہو تو یہ بر دورے "راست" کہلاتے ہیں اور اگر علامتیں مختلف ہوں تو "الٹے" یا "برجعی"۔ ۳۰۵



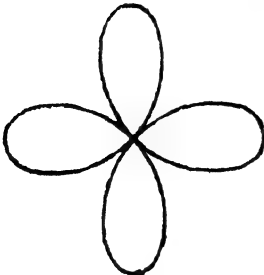
شکل (۹۰)



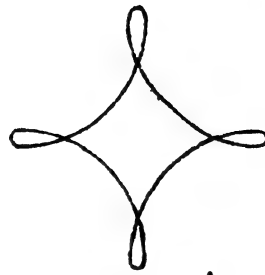
شکل (۹۱)



شکل (۹۲)



شکل (۹۳)



شکل (۹۴)

اشکال ۹۴۱ میں سید ہے اور اُلٹے بر دوریوں کے چند نمونے دکھائے گئے ہیں* بالکل اسی طرح سے پ کے راستہ کی یہ تعریف ہو سکتی ہے یہ ایک نقطہ کا طریق ہے جو نقطہ ق کے لحاظ سے دائری مدار میں حرکت کرتا ہے جبکہ خود نقطہ ق کے گرد یکساں دائری حرکت رکھتا ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ ہر بر دوریہ کی دو جدا گانہ طریقوں سے نکوین ہو سکتی ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ ہر بر دوریہ (زیادہ عام طور پر) ہر بر اور در استدار کے سب کے سب بر دوریہ ہیں کیونکہ اگر لڑکنے والے دائرہ کی زاوی رقتاریکساں ہو تو اس کا مرکز ج ثابت دائرہ کے مرکز و کے گرد یکساں طور پر ایک دائرہ مرقم کرتا ہے جبکہ نیم قطر ج پ جس کے اندر مرقم نقطہ پ واقع ہے ج کے گرد یکساں گھاؤر کرتا ہے۔ دیکھو اشکال ۸۱۸۲۔

بخلاف اس کے ہر ایک بر دوریہ یا بر استدار یہ ہے یا در استدار یہ اور بالخصوص ہر ایک سیدھا بر دوریہ بر استدار یہ ہے اور ہر اُلٹے بر دوریہ در استدار یہ ہے۔ اس امر کو ہم اوپر کی مساوات (۳) کا دفعہ ۱۷۳ کے نتائج کے ساتھ مقابلہ کرنے سے دیکھ سکتے ہیں تاکہ (دفعہ ۱۵۰) میں "فوری مرکز" کے نظریہ کی ضمن میں اس امر کا ایک سادہ ہندسی ثبوت دیا جائیگا۔

اشکال ۹۴۱ میں سید ہے اور اُلٹے بر دوریوں کا تعلق چار قرونوں والی بر اور درتدویروں کے ساتھ واضح ہو گا۔

قدیم ہیئت میں بر دوریے کثرت سے استعمال ہوئے۔ اگر سیاروں کے مداروں کے خروج المرکز اور میلان نظر انداز کر دئے جائیں تو سوچ زمین کے گرد ایک دائرہ مرقم کرنا خیال کیا جاسکتا ہے اور کوئی اور سیارہ اسی مستوی سطح میں

* ایسی مختلف شکلیں بے شمار ہو سکتی ہیں بر دوریہ جلی طور پر ایک لاٹھی کے ذریعہ آسانی سے مرقم ہو سکتے ہیں کئی دیکھتے ہیں جو اس طور پر حاصل کی گئی ہیں پلاکٹس کے رسالہ میں جس کا قبل حوالہ دیا گیا ہے دکھائی گئی ہیں رسالہ کا صفحہ ۲۹ دیکھو۔

سورج کے گرد ایک دائرہ مشتم کرتا ہے، اس لئے بلحاظ زمین کے سیارہ کا مدار ایک بر دوریہ ہے۔ بطلیوس کے وقت سے سو لھویں صدی عیسوی تک اس امر کے متعلق یہی نظریہ قابل قبول رہا، اس کے بعد اس منظر کے متعلق کاپرنیکی کی سادہ تشریح اور توجیہ تدریج غالب آتی گئی۔

ستاروں کے اضافی مداروں میں حلقے ہیں (شکل ۹۱) جو ساکن یا چل نفاط اور "رجعی حرکتوں" کا باعث ہوئے ہیں۔ دراصل یہی نفاط اور الٹی حرکتیں بطلیوس کے ہاتھوں بر دوریوں کی ایجاد کا باعث ہوئیں۔ برعکس اس کے بلحاظ سورج کے جو چاند کا مدار ہے اس میں حلقے نہیں ہیں اگرچہ یہ بر دوریہ ہے، علاوہ اس کے ہر مقام پر چاند کا مدار اندر کی طرف مقعور ہے۔

مثال ۱۔ اگر ترکیبی دائری حرکتوں کی زاوی رفتاریں سادی اور مختلف العلات (ن = ن) ہوں تو لا = (ج + ج) جم ن ت' ما = (ج - ج) جب ن ت

یعنی محصلہ حرکت ناقصی موسیقی ہے۔ خاص صورت میں جبکہ ج = ج، ناقص بلکہ اگر خط مستقیم رہ جاتا ہے۔
یہ مثال بطیوسی علم مناظر میں اہمیت رکھتی ہے۔
مثال ۲۔ بر دوریہ جو خاص صورت اختیار کرتا ہے جبکہ ج = ج قابل توجہ ہے۔
ساواتیں (۳) ہو جاتی ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = ۲ ج \text{ جم } \left(\frac{ن + ن}{۲} \right) \text{ ت جم } \left(\frac{ن - ن}{۲} \right) \text{ ت} \\ \text{ما} = ۲ ج \text{ جب } \left(\frac{ن + ن}{۲} \right) \text{ ت جم } \left(\frac{ن - ن}{۲} \right) \text{ ت} \end{array} \right. \quad (۵)$$

یا لا = (جم طما) ما = (جب طما) (۶)

جہاں طما = $\frac{ن + ن}{۲}$ ت' ر = ۲ ج جم $\frac{ن - ن}{۲}$ طما (۷)

اس لئے منحنی کی قطبی مساوات اس شکل کی ہے

$$r = \text{راجم } m \text{ طما} \dots \dots \dots (۸)$$

جس میں اگر $m > ۱$ تو برودوریہ راست ہے اور اگر $m < ۱$ تو یہ الٹا یا جہی ہے

$$\text{دفعہ ۲۵ کی شکلوں ۹۲، ۹۴ میں بالترتیب } m = \frac{1}{2}, m = 2$$

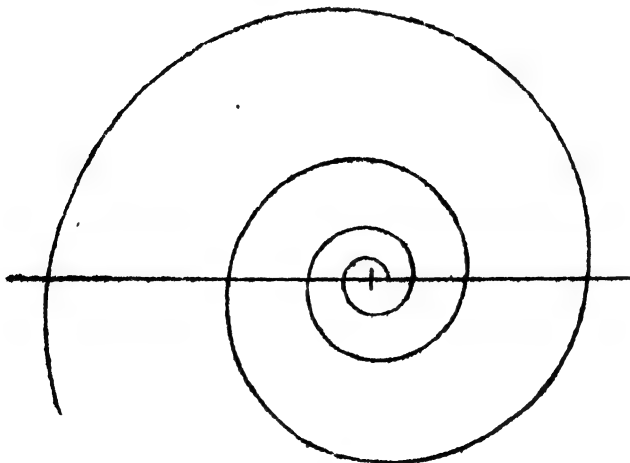
۱۲۶۔ قطبی محدودوں کے لحاظ سے منحنی۔ لولبی خطوط۔

کئی دلچسپ منحنی ہیں جنکی مساواتیں قطبی محدودوں میں زیادہ موزوں طور پر بیان ہو سکتی ہیں، پہلے ہم ”لولبوں“ (Spirals) کو لینگے۔

(آ) ”مساوی الزاویہ لولبی“ یہ خاصیت رکھتا ہے کہ منحنی ہر نقطہ پر سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے۔ اگر اس زاویہ کو α سے تعبیر کیا جائے تو دفعہ ۶۳ کی رود سے

$$\frac{r}{\text{فرطما}} = r \sin \alpha \dots \dots \dots (۱)$$

اس کا حل ہے (دفعہ ۳۸) $r = r_0 \text{ طما } m \text{ عا} \dots \dots \dots (۲)$

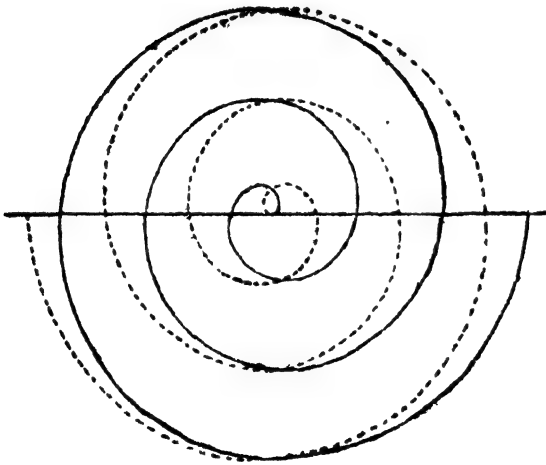


شکل (۹۵)

جیسے طہ - ∞ سے ∞ تک بدلتا ہے 'ر' صفر سے ∞ تک بدلتا ہے
 شکل ۹۵ چونکہ دفعہ ۱۱۲ کی رو سے $\frac{فر}{فرس} = \text{جم عہا}$ اس سے معلوم ہوتا
 ہے کہ منحنی کا طول نیم قطروں 'ر' کے درمیان ہے

$$\frac{فر}{فرس} = (ر - ر) \text{ قط } \infty \dots\dots\dots (۳)$$

(۲) "ارٹمیڈس کالولب" ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے
 جو ایک خط مستقیم مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے جبکہ یہ خط مستقیم خود اپنے
 ایک ثابت نقطہ کے گرد یکساں زاویہ رفتار سے گھومتا ہے۔
 علامات میں $ر = \text{عت}$ ، $طہ = ن$ ت جس سے
 $ر = طہ \dots\dots\dots (۴)$ اگر $ر = \frac{ع}{ج}$ ۔



شکل (۹۶)

شکل ۹۶ میں منحنی دکھایا گیا ہے، نقطہ دار شاخ طہ کی منفی قیمتوں کے جواب
 میں ہے۔ اس منحنی کی تکوین کا ایک اور طریقہ دفعہ ۱۲۴ میں بیان کیا گیا ہے۔

(۳) مستطانی لولب کی تعین اس مساوات سے ہوتی ہے

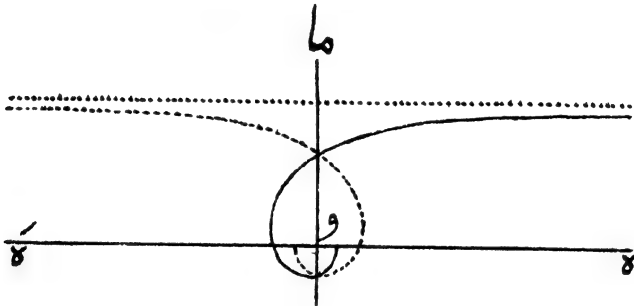
$$r = \frac{1}{\cos \theta} \dots (۵)$$

اگر مامعین ہو جو ابتدائی خط پر کھینچا گیا ہے تو

$$r = \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

جیسے $\cos \theta$ صفر کے قریب پہنچا ہے ر لا انتہائی ہو جاتا ہے مگر مام محدود انتہائی کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اسلئے خط $r = 1$ متقارب ہے۔
شکل ۹۷ میں نقطہ دار نغنی $\cos \theta$ کی منفی قیمتوں سے متعلق ہے۔

۳۰۹



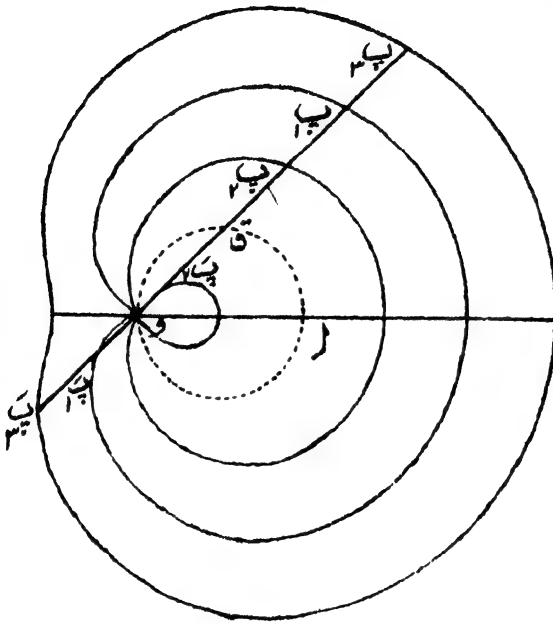
شکل (۹۷)

۱۲۷- گہونگا منمنی (Limaçon) اور خط صنوبری-

قطر ۱ پر ایک ثابت دائرہ بنایا گیا ہے جس کے محیط پر ایک

نقطہ ولایا گیا ہے، اگر وہیں سے گزرنے والے قطر کو ابتدائی خط لیا جائے تو محیط پر کے کسی نقطہ ق کا سمتی نیم قطر ہے

$$r = \cos \theta \dots (۱)$$



شکل (۹۸)

اگر اس نیم قطر برق سے مساوی مستقل فاصلوں ج پر دو نقاط
پ، پ لے جائیں تو ان نقطوں کا طریق کہوں گا نمئی کیلایا گیا۔ اس کی مساوات
ہوگی

۳۱۰

ر = اجم طما + ج (۲)
اس میں ہر دو نقاط پ اور پ کے راستے شامل ہیں جبکہ طما صفر سے
۲۲ تک بدلتا ہے اگر ج > ۱ تو نمئی و میں سے گزرتا ہے جبکہ
طما = ج - ۱ (ج) اور اس صورت میں حلقہ پیدا ہوتا ہے شکل ۹۸
میں پ اور پ سے جو نمئی مرتب ہوتا ہے وہ دیکھو۔ اگر ج < ۱ تو ر
صفر نہیں ہو سکتا، پ، پ کا مرتبہ نمئی شکل میں دیکھو۔
اس خاص صورت میں جبکہ ج = ۱ حلقہ بزرگ کر قرن بن جانا ہے اس صورت میں طریق

”قلب کی شکل کا“ یا منوبری شکل کا منحنی بن جاتا ہے، اس کی مساوات ہے

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (۳)$$

شکل میں چپ، چپ سے ترش شدہ منحنی دیکھو۔ نیز دیکھو شکل ۸۴ دفعہ ۱۲۴۔

۱۲۸۔ منحنی $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ - کئی مشہور منحنی اس نمونہ کے

اندر شامل ہوتے ہیں

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (۱)$$

ن کی مساوی مگر مختلف علامت قیمتوں کے لئے جو منحنی پیدا ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے منقلب ہیں۔ دیکھو دفعہ ۱۳۰۔

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (۲)$$

اور خط مستقیم حاصل ہوتے ہیں۔

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (۴)$$

اور قائم زائد حاصل ہوتے ہیں۔

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (۵)$$

مساوات (۴) سے ر کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں طہ کی ان قیمتوں کے لئے جو $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہیں اور خیالی قیمتیں ملتی ہیں ان قیمتوں کے لئے جو $\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{3\pi}{2}$ کے درمیان ہیں وغیرہ وغیرہ۔ نیز r غلط ہے۔

طہ = ۰ اور طہ = π کے لئے وغیرہ۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ چشمہ منحنی دو معلقوں پر مشتمل ہے اور مبدأ پر اس کا ایک عقدہ ہے۔

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (۶)$$

اگر $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ تو خط منوبری $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ یا $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ ۔

$$r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (۷)$$

اور مکانی $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ یا $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ ۔

بالترتیب حاصل ہوتے ہیں۔
 اگر (۱) کالو کا رتی تفرق لیا جائے اور ماس اور سستی نیم قطر کے درمیان زاویہ
 فہا ہو تو

$$\text{مہم فہا} = \frac{1}{r} \frac{فر}{فرطہ} = \text{سس ن طہ} \dots\dots (۸)$$

$$\text{یا فہا} = \frac{۲}{۲} + \text{ن طہ} \dots\dots (۹)$$

طالب علم اوپر کی مختلف صورتوں میں اس نتیجہ کے مفہوم کا معائنہ کرے۔
 ۱۲۹۔ ماسی قطبی مساوات۔ اگر کسی نغنی کے کسی ماس پر
 عمود ع کھینچا جائے اور نقطہ ماس کا سستی نیم قطر ہو تو بالعموم ع، ر کا تقابل
 ہوگا۔ جو مساوات اس تعلق کو بیان کرتی ہے اسے ہم نغنی کی ”ماسی قطبی“
 مساوات کہتے۔

اگر معمولی قطبی مساوات معلوم ہو تو ماسی قطبی مساوات ان ضابطوں

$$\text{ع} = \text{رجب فہا}، \frac{1}{r} \frac{فر}{فرطہ} = \text{مہم فہا} \dots\dots (۱)$$

اور نغنی کی دی ہوئی مساوات سے طہا، فہا کو سا قاط کرنے سے حاصل
 ہوگی (ضابطوں (۱) کے متعلق دیکھو دفعہ ۶۳)۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} (۱ + \text{مہم فہا}) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{فر}{فرطہ} \right) \dots\dots (۲)$$

بعض اوقات سستی نیم قطر کی بجائے اس کے شکافی یا الٹ کو استعمال کرنا
 زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ اگر لکھا جائے

$$\text{ع} = \frac{1}{r} \text{تو} \frac{فر}{فرطہ} = - \frac{1}{r} \frac{فر}{فرطہ} \dots\dots (۳)$$

اور ضابطہ (۲) ہو جاتا ہے

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \dots\dots\dots (۴)$$

حرکات میں استعمال کرنے کے نقطہ نظر سے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر منحنی کی ماسی قطبی مساوات دی گئی ہو مثلاً

$$(۵) \dots\dots\dots r = f(\theta) \dots\dots\dots (۵)$$

تو منحنی قابل تعیین ہے سو اب لمحاظ تشریق کے کیونکہ

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} \dots\dots\dots (۶)$$

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} \dots\dots\dots (۷)$$

اضافہ شدہ مستقل r_0 کے تغیر کا اثر صرف اتنا ہے کہ منحنی کو با تمام r_0 کے گرد ایک زاویہ میں سے گما دیتا ہے۔

مثال ۱۔ مساوی الزاویہ لولبی میں

$$(۸) \dots\dots\dots r = r_0 \cos \theta \dots\dots\dots (۸)$$

مثال ۲۔ دائرہ میں $r = r_0 \cos \theta$ (دفعہ ۶۳) اور $r_0 = r_0$

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} \dots\dots\dots (۱۰)$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_0} \dots\dots\dots (۱۱)$$

جہاں ماسکہ قطب ہے، اس میں ہر گاہ $r = r_0 \cos \theta$ ، $r_0 = r_0$ ، $r = r_0 \cos \theta$ جس سے

$$(۱۲) \dots\dots\dots r = r_0 \cos \theta \dots\dots\dots (۱۲)$$

اس نمونی کی پیشہور خاصیت ہے۔

یہ مثال اور اوپر کی مثال دونوں ایک عام نتیجہ کے اندر شامل ہیں اور یہ نتیجہ اس نمونہ

$$r = \frac{1}{2} \text{ جہن طہا} \dots\dots\dots (۱۳)$$

کے تمام مخنیات کے متعلق صادق آتا ہے۔

دفعہ ۱۲۸ (۹) کی رو سے $e = \text{رجب فہا} = \text{رجہن طہا} \dots\dots\dots (۱۴)$

اور طہا سا نظر کرنے سے $e = \frac{1+u}{u} \dots\dots\dots (۱۵)$

مثلاً صوبری (ن = $\frac{1}{4}$) کی صورت میں $e = \frac{r}{4} \dots\dots\dots (۱۶)$

مثال ۴ - مرکز دار مخروطوں کی محاسسی قطبی مساوات یہاں دی جاتی ہے کیونکہ بعض اوقات حرکیات میں یہ استعمال ہوتے ہیں اگرچہ ثبوت میں احصا کے استعمال کی ضرورت نہیں۔

فرض کرو کہ مبدا مرکز پر ہے۔ مخروطی کی کارٹیزی مساوات یہ ہے

$$\frac{r^2}{a^2} \pm \frac{r^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (۱۷)$$

اگر بہا فردون نیم قطر ہو تو مرکز دار مخروطیوں کے معلومہ خواص کی بنا پر

$$e \text{ بہا} = \frac{r}{b} \pm \frac{r}{a} = \frac{r}{b} \pm \frac{r}{a} \dots\dots\dots (۱۸)$$

$$\text{اسلئے } \frac{r}{a} \pm \frac{r}{b} = \frac{r}{a} \pm \frac{r}{b} \dots\dots\dots (۱۹)$$

قائم قطع زائد کی خاص صورت میں $e = \frac{r}{a} \dots\dots\dots (۲۰)$ کیونکہ بہا = r ۔
یہی نتیجہ اوپر (۱۵) میں $n = 2$ کہنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵ - اس کے بعد ایک ماسک کو قطب مانکر دوسرے ماسک کے لحاظ سے عمود اور سمتی نیم قطر کو بالترتیب e اور r سے تعبیر کرو۔ چونکہ ماس دو ماسکی نیم قطروں

سے مساوی زاویے بنا آتا ہے اسلئے

$$\frac{e}{r} = \frac{e}{r} \text{ اور اس لئے } \frac{e}{r} = \frac{e}{r}$$

اب $ع = ب$ اور قطع ناقص میں $ر = ۱$ اس لئے قطع ناقص کے لئے $\frac{ع}{ر} = \frac{ب}{۱-۱۲}$ یا اگر نیم درزا خاص $(\frac{ب}{۱})$ کے طول کو ۱ سے تعبیر کیا جائے تو

$$(۲۱) \dots\dots\dots \frac{۱}{ر} - \frac{۲}{ر} = \frac{ل}{ع}$$

قطع ناقص میں $ع$ حاصل ہوتا ہے $\frac{ل}{ع} = \frac{۲}{ر} + \frac{۱}{ر}$ (۲۲) اور ہر کی علامت اس شاخ سے متعلق ہے جو بدا کے پاس ہے اور نیچے کی دور کی شاخ سے۔

مثال ۶۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کے لئے $ع = \frac{۳}{۱}$ (۳) (۶) میں درج کرنے اور مکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ط - ع = ۱ = \int \frac{۱}{۱ - \frac{۳}{ر}} = \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{ر}$$

یا $ر = ۱$ جب $۲ (ط - ع)$ (۲۴) جو چشمہ منحنی ہے۔

۳۰۔ مربوط منحنی۔ تقلیب۔ کئی ہندی نظریہ ہیں جن میں

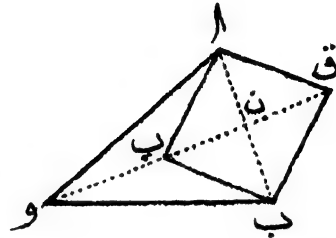
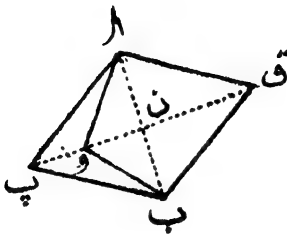
ایک منحنی ایک اور منحنی کے ساتھ ایک خاص رشتہ کے ذریعہ متعلق ہوتا ہے۔ اسے سادہ مثال تقلیب (Inversion) کی ہے۔ اگر ایک ثابت بدا سے کسی معلوم منحنی کا مستقیم قطر و پ تعین کیا جائے اور و پ پر ایک نقطہ پکا ایسا لیا جائے کہ

و پ \times و پ $= ۴$ (۱) جہاں $م$ ایک دیا ہوا مستقل ہے نو پ کے طریق کو ہم $م$ کے طریق کا مقلوب کہیں گے۔ ابتدا کو مرکز کہا جاتا ہے اور $م$ کو تقلیب کا ”مستقل“



وتروں کا نقطہ تقاطع ن ہو تو

و پ × و ق = و ن نہ پ ن = و ا نہ ا پ = مستقل ... (۱)

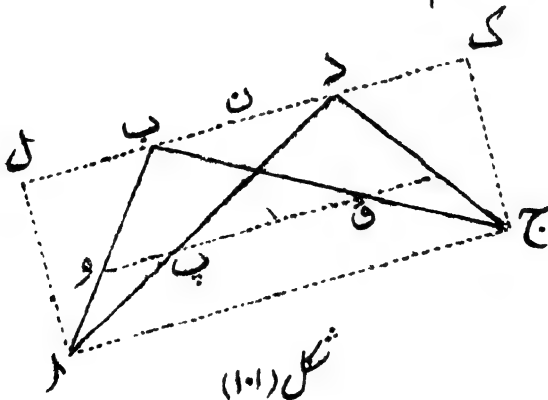


ن شکل (۱۰۰) سے کوئی ایک منحنی مرتبہ کرایا جائے تو ق (یا پ) اس لئے اگر پ (یا ق) سے کوئی ایک منحنی مرتبہ کرایا جائے تو ق (یا پ) بلحاظ نقطہ و کے مقلوب منحنی مرتبہ کریگا۔

خاص طور پر اگر پ کو ایک ثابت چول سی کے ساتھ کر دیں گے ذریعہ منسلک کر دیا جائے اور سی و = سی پ تو پ کا طریق نقطہ و میں سے ایک دائرہ ہوگا اور اس لئے ق کا طریق و سی پہلی القوا اعم ایک خط مستقیم ہوگا۔

اس سے اس ضروری جیلی مسئلہ کا صحیح حل حاصل ہوتا ہے کہ دائری حرکت کو حرکت مستقیم میں رابطہ کاری کے ذریعہ کس طرح تبدیل کیا جائے۔

۲۱۵



ن شکل (۱۰۱)

(۲) ہارٹ (Hart) کا رابطہ۔

اس میں ایک ”جلیبی“ متوازی الاضلاع اب ج د ہوتا ہے جو چار سلاخوں کے سروں کو چولوں کے ذریعہ جوڑنے سے حال ہوتا ہے اور اس کے متبادل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ دیکھو شکل (۱۰) صفحہ ۳۱۳۔

نقطہ و کو ایک ضلع اب میں ایک ثابت چول قرار دیا جاتا ہے اور نقاط پ، ق، بالترتیب اضلاع اد اور ب ج میں نقاط ہیں ایسے کہ اپ: پ د = ج ق: ق ب = او: وب = م: ن (فرض کرو)۔ صریحاً واپ: ق ایک خط مستقیم پ واقع ہیں جو ا ج اور ب د کے متوازی ہے۔

اگر ا اور ج کے قائم ظل ب د پر ل اور گ ہوں اور ب د کا نقطہ وسطی ہو تو $ا ج \times ب د = ۲ ل \times ۲ ن = ب د = دل - بل$ = $اد - اب$

اب وپ: ب د = او: اب = م: م + ن

وق: ا ج = ب ق: اب = ن: م + ن

اس لئے وپ \times وق = $\frac{۲۴}{(۲۴ + ۲۴)}$ (اد - اب) = مستقل (۲)

اس لئے ب اور ق بلحاظ و کے مغلوب منحنی ترسم کرتے ہیں۔ پہلے کی طرح اگر پ کو کڑی پ میں کے ذریعہ جو میں و کے مساوی ہے ایک ثابت چول میں کے ساتھ منسلک کر دیا جائے تو دائری حرکت خط مستقیم میں تبدیل ہو سکے گی۔

۱۳۱۔ پائیں منحنی، متکافی قطبی۔ اگر ایک ثابت نقطہ و سے منحنی کے

کسی محاس پر عمود وے کھینچا جائے تو اس عمود کے پایہ وے کے طریق کو بلحاظ مبدأ وے اصلی منحنی کا ”پائیں منحنی“ کہتے ہیں۔

مثلاً مکانی کا پائیں منحنی بلحاظ ماسک کے رائس پر کا محاس ہے قطع ناقص

اور ع' عمود ہو و سے پائیں کے ماس پر تو بالا آخر

$$\frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ر} \text{ یا } \frac{ع}{ر} = \frac{ع}{ر} \dots\dots\dots (۲)$$

نیز اگر وئے، پ سے ن پر لے تو ہم لکھ سکتے

وے = ع = وئے، ع + مف ع = وئے، وئے = پ = وئے = مف سا
دوسرے اتبہ کی چھوٹی مقداروں سے قطع نظر کرنے سے

مف ع = ن = وئے = پ = وئے مف سا

اسلئے انتہا لینے سے جبکہ پ = وئے، پ سے منطبق ہو ہمیں منحنی کے
ماس پرستی نیم قطر کے ظل کے لئے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{پ}{ع} = \frac{فرع}{فرسا} \dots\dots\dots (۳)$$

اس نتیجہ کی مدد سے مد منفی پائیں منحنیوں کا سوال حل ہو جاتا ہے یعنی اسکی
مد سے وہ منحنی مل جاتا ہے جس کا پائیں کوئی دیا ہو منحنی ہو۔ اگر و کو مبدا
اور مسا کے ابتدائی خط کو محور کا مانا جائے تو نقطہ تماس پ کے محدود ہیں

۳۱۴

لا = وئے جم مسا۔ وئے پ جب سا
ما = وئے جب سا + وئے پ جم سا

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{یا لا = ع جم سا۔ } \frac{فرع}{فرسا} \text{ جب سا} \\ \text{ما = ع جب سا + } \frac{فرع}{فرسا} \text{ جم سا} \end{array} \right. \dots\dots\dots (۴)$$

مثال ۱۔ اگر مخروطی $\frac{لا}{ر} \pm \frac{ما}{ر} = ۱$ (۵)

کے مرکز پر مبدا ہو اور مسا وہ زاویہ جو ع و لا کے ساتھ بناتا ہے تو مخروطی
تراشوں کی کتابوں میں یہ دکھایا گیا ہے کہ

$$ع = وئے جم مسا \pm وئے جب مسا \dots\dots\dots (۶)$$

اس لئے پائیں منحنی کی قطبی مساوات ہے

$$(۷) \quad r = r_0 \cos \theta \pm b \text{ جب } \theta = 0 \dots \dots (۷)$$

$$(۸) \quad r = r_0 \sin \theta \pm b \text{ جب } \theta = 90^\circ \dots \dots (۸)$$

کی صورت میں پائیں منحنی ہے $r = r_0 \cos \theta \pm b$ جب $\theta = 0$ (۹)
مثال ۲۔ نیم قطر r_0 کے دائرے میں جہاں قطب و مرکز ج سے فاصلہ
ج پر واقع ہو اگر خط و ج کو مسا کا مبدأ مانا جائے تو شکل سے ظاہر ہے کہ

$$(۱۰) \quad r = r_0 \cos \theta \pm b \text{ جب } \theta = 0 \dots \dots (۱۰)$$

اس لئے پائیں منحنی کہوں گے منحنی ہے

$$(۱۱) \quad r = r_0 \sin \theta \pm b \text{ جب } \theta = 90^\circ \dots \dots (۱۱)$$

اگر محیط پر ہو جس صورت میں $r = r_0 \sin \theta \pm b$ تو پائیں منحنی خط صنوبری ہوگا

$$(۱۲) \quad r = r_0 \cos \theta \pm b \text{ جب } \theta = 0 \dots \dots (۱۲)$$

مثال ۳۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کا پائیں صنوبری

$$(۱۳) \quad r = r_0 \cos \theta \pm b \text{ جب } \theta = 0 \dots \dots (۱۳)$$

ہے۔ اس مساوات کو اس طرح لکھئے

$$(۱۴) \quad r = r_0 \cos \theta \pm b \text{ جب } \theta = 0 \dots \dots (۱۴)$$

ضابطوں (۱۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$r = r_0 \cos \theta \pm b \text{ جب } \theta = 0 \dots \dots (۱۵)$$

$$(۱۵) \quad r = r_0 \sin \theta \pm b \text{ جب } \theta = 90^\circ \dots \dots (۱۵)$$

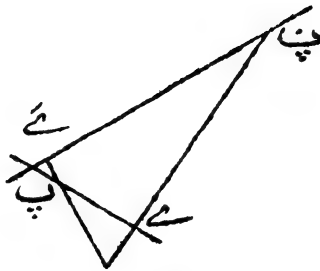
جو مبدأ میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہے۔

کسی منحنی $r = r_0 \cos \theta \pm b$ کے ماس کے قطب کا طریق بلحاظ ایک ثابت مخروطی کے
”شکافی قطبی“ کہلاتا ہے، مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر $r = r_0 \cos \theta \pm b$
کے ماسوں کے قطبوں کا طریق $r = r_0 \cos \theta \pm b$ ہو تو $r = r_0 \cos \theta \pm b$ کے ماسوں کے قطبوں کا طریق
 $r = r_0 \cos \theta \pm b$ ہوگا۔ ”شکافی“ کے استعمال کی یہی وجہ ہے۔

ہم اس صورت کا یہاں محض سرسری ذکر کر دینگے جبکہ ثابت مخروطی دائرہ ہو۔
اگر اس دائرہ کا مرکز و ہو اور نیم قطر r_0 تو منحنی $r = r_0 \cos \theta \pm b$ کے کسی ماس کا قطب پ

اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ اس حماس پر ϕ سے عمود نکالا جائے اور ϕ سے
پر ایک نقطہ پ (ایسا لیا جائے کہ

$\phi \times \phi = \phi^2 = 20 \dots \dots \dots (17)$
اس لئے اس صورت میں، تنکائی قطبی، بلحاظ نقطہ ϕ کے دے ہوئے منحنی کے
پائیں کا متغلوب ہے۔



شکل (۱۰۳)

اور پر کی تنکائی خاصیت کی رو سے، اصلی منحنی کو پ کے طریق کے پائیں کا متغلوب
ہونا چاہئے۔ اسکی بائسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔ کیونکہ اگر پ اصلی منحنی کے ساتھ
حماس کا نقطہ تماس ہو اور اگر ϕ پ کے طریق کے حماس کو ϕ سے پر لے تو زاویہ
 ϕ پ کے اور ϕ پ سے مساوی ہونگے۔ اس لئے ϕ پ
زاویہ قائمہ ہے اور ϕ پ کے پائیں منحنی کو مرسم کرتا ہے۔ اور چونکہ
پ سے پ سے ہم محیط چار ضلعی ہے اس لئے

$$\phi \times \phi = \phi^2 = 20 \dots \dots \dots (18)$$

اس لئے پ پ کے طریق کا متغلوب مرسم کرتا ہے۔
مثال ۴۔ دائرہ کا قطبی تنکائی بلحاظ کسی ہذا کے ایک مخروطی تراش ہے جس کا
ہذا اس کے ہے۔

مثال ۲ کی مانند دائرہ کے پائیں منحنی کا ضابطہ ہے

$$c = 1 + j \cdot \text{جم مسا} \dots \dots \dots (19)$$

سہا کی بجائے طہ اور ح کے لئے $\frac{۲۴}{۲}$ لکھنے سے ہیں قطبی شکافی کی مساوات
اس شکل میں حاصل ہوتی ہے

$$\frac{۲۴}{۲} = ۱ + ج + جم + طہ \dots \dots \dots (۱۹)$$

جو ایک مخروطی تراش ہے، جس کا ماسکہ بدآپ ہے اور جس کا خروج مرکز $\frac{ج}{۲}$ ہے۔
اس لئے مخروطی قطع ناقص، شکافی یا زاہد ہے بموجب اس کے کہ مبدأ دائرہ کے اندر
اوپر یا باہر ہے۔

$$\text{شال ۵۔ مخروطی } \frac{لا}{۲} \pm \frac{فا}{ب} = ۱ \dots \dots \dots (۲۰)$$

کاپائیں یعنی بلحاظ مبدأ کے یہ ہے
ح = ر + جم + سہا ± ب + جب + سہا \dots \dots \dots (۲۱)
اس سے قطبی شکافی ہے

$$\frac{۲۴}{۲} = ر + جم + طہ \pm ب + جب + طہ \dots \dots \dots (۲۲)$$

یا
ر + لا ± ب + فا = ۲۴ \dots \dots \dots (۲۳)
جو ایک اہم مرکز مخروطی تراش ہے۔

۱۳۲۔ دو قطبی محدود۔ اگر کسی منحنی پر کوئی نقطہ پ ہو

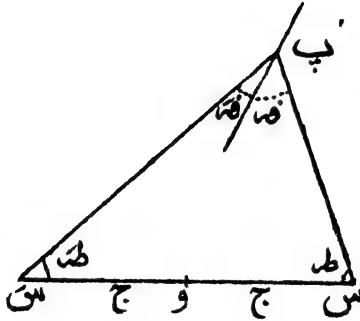
اور دو ثابت نقطہ یا ماسکوں میں، س سے اس نقطہ کے فاصلے
(ر + ر) ہوں تو ان فاصلوں کے درمیان جو اس منحنی کے لئے رشتہ ہے
اس کے ذریعہ اس منحنی کی تعریف ہو سکتی ہے۔ مثلاً

ف (ر + ر) = ۱۰ \dots \dots \dots (۱)
اگر زاویوں پ میں س، پ میں س کو بالترتیب طہ، طہ
سے تعبیر کیا جائے اور جو زاویے نیم قطر ر + ر ماس کے ساتھ بنائے گئے ہیں وہ
فہا، فہا ہوں تو دفعہ ۱۱۲ کی مانند

$$(۲) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \text{جم فہا} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \text{جم فہا} \\ \frac{\text{رفطہ}}{\text{فرس}} = \text{جب فہا} \quad \frac{\text{رفطہ}}{\text{فرس}} = \text{جب فہا} \end{array} \right.$$

علاوہ مانگے ذیل کے رشتے ہیں

$$(۳) \dots \dots \dots \text{رجب طہا} = \text{رجب طہا} + \text{رجم طہا} = \text{ج} + \frac{۱}{۲} \text{س س}$$



شکل (۱۰۴)

مثال ۱۔ ناقص میں $ر + ر = ۱۲$ (۴)

اس لئے $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \text{یعنی جم فہا} + \text{جم فہا} = \text{یا فہا} = ۱۱$ (۵)
اس لئے ماسکی فاصلے نغنی کے ساتھ مکمل زاوے بناتے ہیں۔

اسی طرح سے قطع زاوے میں $ر = ۱۲$ (۶)

جم فہا = جم فہا (۷)
یعنی ماسکی فاصلے نغنی کے ساتھ متقابل جانبوں میں مساوی زاوے بناتے ہیں۔

مثال ۲۔ ایک انعکاسی یا انعطافی سطح کی شکل دریافت کرو کہ تمام ایسی شعاعیں جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتی ہیں اور اس پر گرتی ہیں انعکاس اور انعطاف

کے بعد بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں۔

۱۰ انعکاس کی صورت مثال (۱) کا عکس ہوگی سطح ایسی ہونا چاہئے جہاں
یا زاہد کو (س، س) کے ملانے والے خط کے گرد پھرنے سے حاصل ہو۔
۱۱ انعطاف کی صورت میں اگر دو واسطوں کے انعطاف ٹماصا اور مٹا ہوں

تو
جہاں

مساجد صبر = مساجد صبر (۸)
صبر = $\left(\frac{\pi}{2} - \text{فما}\right) \pm \text{صبر}$ (۹)

اس لئے $m \pm m = 0$ (۱۰)

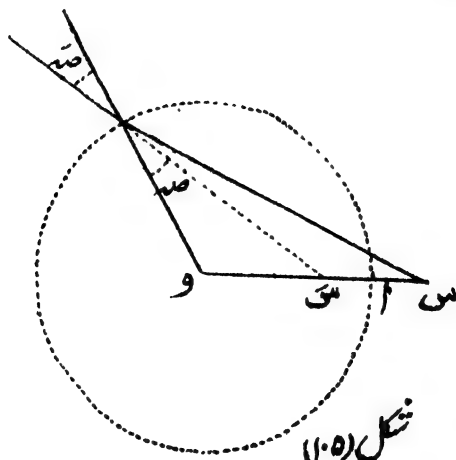
یا فی (مصار ± مصار) = (۱۱)

تیکس سے مہار + مہار = مستقل (۱۲)

ایسے مخفیات جن میں دو نیم قطروں کے معلومہ ضیعفوں کا مجموعہ (یا فرق) مستقل ہو
 کارٹینری بیضہ کہلا تے ہیں کیونکہ ای کارٹ نے ہی ابتدا میں علم مناظر کے اس مسئلہ
 پر بحث کی۔ جب (۱۲) میں غلی علامت لیجائی ہے تو اس قبیل کے اندر دائرہ

$$(13) \dots\dots\dots \frac{50}{50} = \frac{1}{1}$$

شامل ہو جانا ہے دیکھو شکل ۱۰۵۔



مثال ۳۔ کیسینی (Cassini) کے بیضوی انحنیات کی یہ تعریف ہے۔

ر = م (۱۴)
جہاں م مستقل ہے۔ چونکہ ایک ایسے نقطہ پ کے لئے جو خط میں سے یہ نقاط
میں سے کے درمیان واقع ہو ر کی بڑی سے بڑی قیمت ج ہے اس لئے
منحنی دو الگ الگ بیضویوں پر مشتمل ہوگا جو بالترتیب میں سے کے گرد بنے ہوں گے
اگر $م > ج$ اور صرف ایک بیضہ پر مشتمل ہوگا جو دونوں نقاط کو گھیرے ہو
ہوگا جبکہ $م < ج$ ۔

اس خاص صورت میں جبکہ $م = ج$ ، منحنی کی عینک بیسی شکل ہوگی۔ اسے ہم
برنولی کا پشمہ منحنی (Lemniscate) کہیں گے۔ یہ منحنی متعدد مسائل ریاضی میں
آتا ہے۔ اگر میں سے کے وسطی نقطہ و کو قطب مانا جائے اور و میں کو ابت لئی
خطہ اور ان کے لحاظ سے محدودوں کا ایک نظام (ر، طہ) ہو تو

$$ر = ر + ج - ۲ ج ر + ج طہ، ر = ر + ج + ۲ ج ر + ج طہ$$

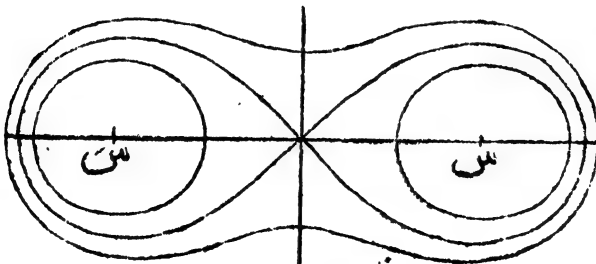
اس لئے چشمہ منحنی کی مساوات ہے

$$(ر + ج)^۲ - ۲ ج ر + ج طہ = ج$$

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے

$$ر = ۲ ج ر + ج طہ (۱۵)$$

متقابلہ کر دفعہ ۱۲۸ کے ساتھ۔



شکل (۱۰۶)

مثال ۴۔ متناطیسی منحنی۔ اگر $\frac{ص}{ر}$ ایک متناطیسی کے شمالی اور ۳۲۲ جنوبی قطب ہوں تو کسی نقطہ $\frac{ص}{ر}$ پر تو میں ہوں گی $\frac{ص}{ر}$ سمت میں پ میں اور $\frac{ص}{ر}$ سمت پ میں میں۔ "توت کا خط" ایسا خط ہے جو نقطہ نقطہ حاصل توت کی سمت میں کھینچا جائے۔ اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل توت اس خط کی عمود وار سمت میں صفر ہے ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ص}{ر} \text{ جب ف} + \frac{ص}{ر} \text{ جب ف} = ۰$$

$$\text{یا } \frac{۱}{ر} \frac{ف}{ف} + \frac{۱}{ر} \frac{ف}{ف} = ۰ \dots (۱۶)$$

اب چونکہ رجب ط = رجب ط اس لئے

$$\text{جب ط} \frac{ف}{ف} + \text{جب ط} \frac{ف}{ف} = ۰$$

$$\text{یا } \text{جم ط} + \text{جم ط} = \text{مستقل} \dots (۱۷)$$

"سادہ قوہ کا خط" وہ ہے کہ ایک متناطیسی قطب پر جو اسے مرسم کرے کوئی کام نہ ہو۔ اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل توت اس خط کی سمت میں صفر ہے ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ص}{ر} \text{ جم ف} - \frac{ص}{ر} \text{ جم ف} = ۰$$

$$\text{یا } \frac{۱}{ر} \frac{ف}{ف} - \frac{۱}{ر} \frac{ف}{ف} = ۰ \dots (۱۸)$$

$$\text{جس سے } \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} = \text{مستقل} \dots (۱۹)$$

سادہ قوہ کے خط لازماً توت کے خطوط پر علی التوائم ہوں گے۔

امثلہ ۴۲

جبر مخفی

- ۱- ان مخفیات کو مترسم کرو $\text{ما} = ۴ \text{ لا} (۱-۱) \text{ لا}$ ، $\text{ما} = \text{لا} + \text{لا} + ۱$
 ۲- مخفی $\text{لا} = \text{ما}$ (۱-۱) کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکے حلقہ کا رقبہ $\frac{1}{16}$ ہے۔ یہ معلوم کرو کہ طلعہ کا عرض کہاں بڑے سے بڑا ہے۔ $[\text{لا} = \frac{1}{4}]$
 ۳- مخفی $\text{لا} = \text{ما}$ (۲-۱) کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے دو طلعے ہیں اور ہر ایک کا رقبہ $\frac{1}{8}$ ہے۔

- ۴- مخفیات $\text{ما} = \text{لا} (۱-۱) \text{ لا}$ ، $\text{ما} = \text{لا} (۲-۱) \text{ لا}$ کو مترسم کرو۔
 ۵- مخفی $\text{لا} = \text{ما}$ (۲-۱) کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ $\frac{1}{8}$ ہے۔
 ۶- مخفی $\text{لا} = \text{ما}$ (۲-۱) کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ $\frac{1}{8}$ ہے۔
 ۷- ثابت کرو کہ مخفی $\text{لا} = \text{ما}$ (۲-۱) کی قوس کا طول 'رأس سے اس

- نقطہ تک جس کا فصلہ لا ہے' ہے $\frac{1}{16} = \frac{1}{16} (۱۴ + ۱۹) - \frac{1}{16}$
 ۸- مخفی $\text{لا} = \text{ما}$ اور خط $\text{لا} = \text{ما}$ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اس کا اوسط مرکز $(\frac{5}{8} \text{ لا} \cdot \frac{5}{8} \text{ لا})$ ہے۔

- ۹- مخفی $\text{لا} = \text{ما}$ (۲-۱) محور لا کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ وہ حجم جو سطح مکونہ اور محور پر عمود دار ایک مستوی کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اس مستوی پر اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا طول اور دائری قاعدہ دونوں وہی ہیں جو سطح مقطوعہ کے ہیں۔

- ۱۰- ان مخفیات کو مترسم کرو $\text{ما} = \frac{1}{4}$ ، $\text{ما} = \frac{1}{4} (۱-۱) \text{ لا}$
 ۱۱- رقبہ جو مخفی $\text{ما} = \frac{1}{4} (۱-۱) \text{ لا}$ اور اس کے مقابل کے درمیان

گھرا ہوا ہے وہ π ہے۔
اگر یہی منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومتے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم $\frac{1}{4}\pi^2$ ہوگا

$$12- \text{ان منحنیات کو مرسم کرو} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$13- \text{ان منحنیات کو مرسم کرو} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$14- \text{ان منحنیات کو مرسم کرو} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

اعظم اور اقل معین (اگر کوئی ہوں) اور نقاط العطف دریافت کرو۔

$$15- \text{منحنی} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad (\text{شکل ۷۴}) \text{ اور اس کے متقارب کے}$$

درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ $\frac{1}{4}\pi$ ہے۔ اگر یہ منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومتے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم $\frac{1}{4}\pi^2$ ہوگا۔

$$16- \text{منحنی} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad \text{کو مرسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اسکی دو شاخوں اور کسی ایک متقارب کے درمیان} \quad \frac{1}{4}\pi \text{ ہے۔}$$

$$17- \text{ثابت کرو کہ منحنی} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad (\text{شکل ۷۵}) \text{ اور اس کے متقارب کے درمیان کا رقبہ} \quad \frac{1}{4}\pi \text{ ہے۔}$$

$$18- \text{منحنی} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad \text{کو مرسم کرو اور ثابت کرو کہ منحنی اور کسی ایک متقارب کے درمیان رقبہ} \quad \frac{1}{4}\pi \text{ ہے۔}$$

$$19- \text{منحنی} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \quad \text{کو مرسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے قطعہ کا رقبہ} \quad \frac{1}{4}\pi \text{ ہے۔}$$

۲۰۔ منہی $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ (۱۲-لا) (لا-لا) کو مرسم کرو اور ثابت کرو کہ یہ رقبہ $\frac{۳}{۲}$ لا گھیرتا ہے۔

۲۱۔ منہی $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ (لا-ب) + ج کو مرسم کرو۔

۲۲۔ منہی (لا = ت - ت' = ما = ا - ت) کو ت کی متقی قیمتوں کے لئے مرسم کرو۔ اور ثابت کرو کہ یہ ایک قطعہ پیداکرتا ہے جس کا رقبہ $\frac{۱۶}{۱۳}$ ہے۔

امثلہ ۵۳

(زنجیرہ، خط دو بیروغیرہ)

۱۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ج}$ جنم لے میں $\text{س} = \text{ما} - \text{ج}$

۲۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ وی ایک منہی ہے جس میں سین کے پایہ سے ماس پر عمود مستقل طول کا ہوتا ہے۔

۳۔ ایک ہی اونچائی پر دو معلومہ نقطے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام زنجیرہ خطوط میں سے جو ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور جن کے محور انتصابی ہیں ایک زنجیرہ ایسا ہے جس میں ان نقاط کے نیچے مرتب کی گہرائی کم سے کم ہے۔
نیز ثابت کرو کہ اس زنجیرہ میں مذکورہ نقطوں پر کے ماس ایک دوسرے سے مرتب بدلتے ہیں۔

اگر ان نقطوں کے درمیان فاصلہ ۲ ب ہو تو مرتب کی گہرائی ب جبنا ع

ہے انہی کی قوس $\frac{\text{ب جبنا ع}}{\text{ع}}$ ہے اور دے ہوئے نقاط پر منہی کا میلان

افق کے ساتھ جسم (قطر ع) ہے جہاں ع مسامات ع منہی ع = اکی مثبت اصل ہے۔

۴- خط جبری (Tractrix) کے کسی نقطہ کے محدد ان شکلوں میں بیان ہو سکتے ہیں $لا = (ع - مسن ع)$ ، $ما = ر$ قطر ع جہاں ع تغیر بتدل (parameter) ہے۔

۵- ثابت کرو کہ خط جبری میں $ما = ر$ فوق ہے۔

جہاں قوس مس قرن سے ناپی گئی ہے۔

۶- اس مجسم کا حجم جو خط جبری کو اس کے تقارب کے گرد گھمانے سے پیدا ہو $\frac{2}{3}\pi$ ہے۔

اسی مجسم کی سطح π ہے۔

۷- اگر ایک متحرک نقطہ کے محدد $لا = ر$ جن جن ن ت، $ما = ب$ جن جن ن ت ہوں جہاں ن ت وقت ہے تو اس کا راستہ قطع زائد ہو گا اور اس کی رفتار مزدوج نیم قطر کے طول کے متناسب ہوگی جو مزدوج زائد کے ساتھ اسکے تقاطع تک ناپا گیا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر جو رقبہ جو کرتا ہے وہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے۔

۸- لیسازو کے منحنی $لا = ر$ جب ۲ (ن ت - صہ) $ما = ب$ جن جن ن ت کے کسی حلقہ کا رقبہ $\frac{4}{3}\pi$ ر ب حجم ۲ صہ ہے۔

۹- ثابت کرو کہ لیسازو کا منحنی $لا = ر$ جب جن جن ن ت، $ما = ب$ جن جن ن ت ۳۳

منحنی $\frac{ب}{ا} = \frac{لا}{ا}$ (۴ - $\frac{لا}{ا}$ - ۳) کے کچھ حصہ پر متل ہے۔ اس منحنی کو مرکبہ

۱۰- اگر خط تدویر میں لڑنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرکز نقطہ پ کی رفتار عماد ہے پ (مثل ۱) کے متناسب ہوگی۔

۱۱- خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد گردش دینے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا حجم $\frac{5}{2}\pi$ ہے جہاں کون دائرہ کا نیم قطر ہے۔

اسی مجسم کی سطح $\frac{6}{3}\pi$ ہے۔

۱۲- خط تدویر کا وہ حصہ جو دو متوازی قرون کے درمیان ہے اس پر کے ماس کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ سطح گھونہ کا رقبہ $\frac{3}{2}\pi$ ہے۔

نیز ثابت کر دے کہ مذکورہ بالا سطح اور ان دائروں کے مستویوں کے درمیان جنہیں
قرن پیدا کرتے ہیں گھرا ہوا حجم $\frac{1}{2} \pi r^2$ ہے۔

۱۳۔ خط تدویر اپنے محور کے گرد گھومنے سے جو حجم پیدا کرتا ہے وہ ہے
 $\frac{1}{4} \pi (r_1^2 - r_2^2)$ ہے۔

۱۴۔ اسی مجسم کی سطح $\frac{1}{2} \pi (r_1^2 - r_2^2)$ ہے۔

۱۵۔ ایک قرن سے دوسرے قرن تک خط تدویر کی قوس ہے اس کا اوسط
مرکز قاعدہ سے $\frac{5}{12} r$ فاصلہ پر ہے۔

۱۶۔ خط تدویر اور اس کے قاعدہ کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ
سے فاصلہ $\frac{5}{8} r$ پر ہے۔

۱۷۔ ثابت کر دے کہ منحنی $(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi) = \pi$ میں کسی نقطہ پر کا ماس محدودوں کے

محوروں پر جو مقطوع کا ماس ہے وہ بالترتیب $\frac{1}{2} \pi$ اور $\frac{1}{2} \pi$ ماس ہیں۔

اس طرح اس کی تصدیق کر دے کہ محوروں کے درمیان ماس کا طول مستقل ہے۔

۱۸۔ مساواتوں $(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi) = \pi$ اور $(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi) = \pi$ سے ثابت کر دے کہ ستارہ نما

(Astroid) میں $\frac{1}{2} \pi$ اور $\frac{1}{2} \pi$ جب $\frac{1}{2} \pi$ اور $\frac{1}{2} \pi$ منحنی کا کل

طول $\frac{1}{2} \pi$ ہے۔

۱۹۔ ثابت کر دے کہ ستارہ نما کا کل رقبہ $\frac{3}{8} \pi$ ہے۔

۲۰۔ دو مقابل کے قروں کو ملانے والے خط کے گرد ستارہ نما کو گھمانے سے
جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم $\frac{3}{8} \pi$ ہے۔

۲۱۔ منحنی $(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi) = \pi$ میں جب $\frac{1}{2} \pi$ کے رقبہ کا طول $\frac{1}{2} \pi$ ہے

اور رقبہ جو منحنی گھیرتا ہے وہ $\frac{3}{8} \pi$ ہے۔

۲۲۔ 'ن' قروں والے بریادہ تدویر کا کل محیط $\frac{8}{3} \pi$ ہے جہاں $\frac{8}{3} \pi$

- ثابت دائرہ کا نیم قطر ہے۔
 ۲۳۔ اس شخص کا خاکہ کھینچو جو دو یکساں دائری حرکتوں کو ترکیب دینے سے پیدا ہو
 جبکہ دائروں کے نیم قطر مساوی ہوں لیکن دور ذرا مختلف ہوں (۱) جبکہ گھماؤ
 ایک ہی سمت میں ہوں اور (۲) جبکہ گھماؤ متقابل سمتوں میں ہوں۔
 ۲۴۔ ثابت کرو کہ بردوریہ میں ماس مرکز میں سے نہیں گزر سکتا جب تک کہ
 $\text{ن ج} > \text{ن ج جہاں دو مقداروں ج ج میں سے ج بڑا ہے (دفعہ ۱۲۵)}$
 ۲۵۔ ثابت کرو کہ استداري $\text{لا} = \text{اطما} + \text{گ جب طما} = \text{ک جم طما}$ کی
 پوری سوچ کا طول ایک قطع ناقص کے محیط کے مساوی ہے جس کے نیم محور $\text{و} + \text{ک}$
 اور ک ہیں۔

امثلہ ۴۴

قطبی محدود

- ۱۔ ثابت کرو کہ ایک ہی زاویہ والے تمام مساوی الزاویہ لولبی متماثلًا مساوی
 ہوتے ہیں۔
 ۲۔ زاویہ عما والے مساوی الزاویہ لولبی میں سمتی نیم قطر (د) جو رقبہ عبور کرتا
 ہے وہ ہے $\frac{1}{4} - (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})$ اس عما جہاں $\frac{1}{4}$ اطراف میں رکھی
 قیمتیں ہیں۔
 ۳۔ ثابت کرو کہ اٹمیدس کے لولب میں زاویہ (فما) جو ماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان
 بنتا ہے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم فما} = \frac{1}{\sqrt{2+3}}$$

 ۴۔ ثابت کرو کہ متکافی لولب میں نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے اس کا اضافہ نیم قطر کے متناسب ہے۔
 ۵۔ ثابت کرو کہ خط منویری کے قطب میں سے گزرنے والے تمام ذرات ایک ہی طول کے

ہوتے ہیں۔ کیا یہی بات درست ہے کہونگا منحنی کے لئے۔

۶۔ خط صنوبری $\text{ر} = \text{د} + (\text{جم طما})$ کا رقبہ $\frac{۳}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ ہے۔

۷۔ منحنی $\text{ر} = \text{د} + ۲ \text{د}$ جم طما کو مرسم کرد اور ثابت کرو کہ اندرونی حلقہ کا رقبہ ۵۴۳۵د ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ خط صنوبری میں $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطما}} = \frac{۲ \text{د} + \text{جم طما}}{۲}$ اور اس طرح

دکھاؤ کہ کل محیط د ہے۔

۹۔ خط صنوبری کو اس کے محور کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ $\frac{۳}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ ہے۔

۱۰۔ خط صنوبری میں ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا عرض (محور پر عمود وار) $\frac{۳}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ ہے اور دوسرا محاس محور کو قطب سے فاصلہ $\frac{۱}{۲} \text{د}$ پر ملتا ہے۔

۱۱۔ کہونگا منحنی $\text{ر} = \text{د} + \text{جم طما} + \text{ج}$ میں اعظم معین اور اقل فصلہ معلوم کرو

۱۲۔ کہونگا منحنی $\text{ر} = \text{د} + \text{جم طما} + \text{ج}$ کا رقبہ جبکہ $\text{ج} < \text{د}$ ہے $\frac{۳}{۲} (\text{ج} + \frac{۱}{۲} \text{د})$

۱۳۔ ہندی طریق پر ثابت کرو کہ اگر دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو مس کریں اور ایک دوسرے کے ساتھ مستقیم زاویہ بنائیں تو ان کے تقاطع کا طریق کہو کہ منحنی ہے۔

۱۴۔ کل رقبہ چشمہ منحنی $\text{ر} = \text{د} + \text{جم} ۲ \text{طما}$ کا $\frac{۱}{۲} \text{د}$ ہے۔

۱۵۔ نیز اس منحنی کے ہر حلقہ کا محیط $\frac{۱}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ جب $\frac{۳}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ فرطما

ثابت کرو کہ ناقصی تکملوں (دفعہ ۱۱۱) کی تزئیم میں یہ مکملہ مساوی ہے

$\frac{۱}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ کے۔

۱۶۔ چشمہ منحنی کے کسی حلقہ کے رقبہ کا واسطہ مرکز قطب سے فاصلہ

$\frac{۱}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ پر ہے۔

۱۷۔ بر دوریہ $\text{ر} = \text{د}$ جب م طما کے ایک حلقہ کا رقبہ ہے $\frac{۳}{۲} \text{د} + \frac{۳}{۲} \text{د}$ ۔

۱۸۔ منحنی $\text{ر} = \text{د} + \text{جم طما}$ کو مرسم کرد۔

۱۹۔ ”زیادہ سے زیادہ تجاذب والے مجسم کے لئے“ یعنی اس شکل کے لئے جو منحنی
 $r =$ و حجم r^3 کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے ذیل کے خواص ثابت کرو
 (۱) اس کا حجم $\frac{4}{15} \pi r^3$ ہے۔

(۲) زیادہ سے زیادہ عرض ۲۲۰.۸ r ہے مبداء سے ۳۳۸.۹ r فاصلہ پر۔

(۳) حجم کا اوسط مرکز قطب سے $\frac{15}{16} r$ فاصلہ پر ہے۔

۲۰۔ کسی منحنی کا ”قطبی زیر تماس“ وہ طول ہے جو قطب میں سے گزرنے والے
 خط پر جو سمتی نیم قطر پر عمود وار ہو، تماس کا ثابہ ثابت کرو کہ اس کا طول r فاصلہ ہے۔
 ثابت کرو کہ شکافی لولب میں قطبی زیر تماس مستقل ہوتا ہے۔

۲۱۔ نیم قطر r کا دائرہ ہے۔ ثابت کرو کہ اسکے درجیمہ کی مماسی قطبی مسادات ہے
 $r = r'$ جہاں مرکز قطب ہے۔

۲۲۔ ارض میدس کے لولب (شکل ۱۱۱) میں ثابت کرو کہ $r = r' = \frac{r^2}{r + r'}$

۲۳۔ شکافی لولب (شکل ۹۴) میں ثابت کرو کہ $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}$

۲۴۔ منحنی $r =$ حجم r^3 میں ثابت کرو کہ $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}$

۲۵۔ ان منحنیات $r =$ حجم r^3 میں ثابت کرو کہ بالترتیب

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}$$

۲۶۔ برتدویر (دفعہ ۱۲۳) میں ثابت کرو کہ $r = r' = \frac{r^2}{r + r'}$

درتدویر کے لئے متناظر ضابطہ کیا ہے۔

۲۷۔ کارٹیزی مسادات اس منحنی کی دریافت کرو جس میں $r =$ وجب سا جہ r^2 [لا. م. د. م. د.]

- ۲۸۔ اس منحنی کی قطبی مساوات دریافت کرو جس میں $\frac{r^2}{a^2 + b^2} = e$
- ۲۹۔ ایک منحنی کی ماسی قطبی مساوات دی ہوئی ہے، اسکی توس کے لئے ضابطہ

$$m = \int \frac{r^2}{r^3} dr \text{ ثابت کرو۔}$$

- ۳۰۔ ضابطہ $e \text{ فرمیں} = \frac{r^2}{a^2 + b^2}$ ثابت کرو اور اسکی ہندی تعبیر بیان کرو۔
- اس لئے ثابت کرو کہ اگر وہ رقبہ جو کسی متحرک نقطہ کا سمتی نیم قطر عبور کرتا ہے وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھے تو نقطہ کی رفتار اس عمود کے بالعکس متناسب ہوگی جو ابتدا سے راستہ کے ماس پر کھینچا جائے۔

امثلہ ۴۵

مربوط منحنی۔ دو بی محلو

- ۱۔ مساوی الزاویہ لولب کا مقلوب بلحاظ قطب کے ایک مساوی لولب ہے۔
- ۲۔ قطع زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے مرکز پر ایک نقطہ رکھا ہے۔
- ۳۔ قائم زاہد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے بیرونوں کی کا چشمہ منحنی ہے۔
- ۴۔ قطبی مساواتوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا مقلوب ایک دائرہ ہے جو قطب کے قطب میں سے گزرتا ہے اور برعکس اسکے۔
- ۵۔ قطبی مساوات کے مدد سے ثابت کرو کہ دائرہ کا مقلوب دائرہ ہے۔
- ۶۔ قطع مکانی کا مقلوب بلحاظ ماسک کے خط صنوبری ہے۔
- کسی مخروطی کا مقلوب بلحاظ ماسک کے گہونگا منحنی ہے۔

۷۔ ناقص $\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = 1$ کا مقلوب بلحاظ مرکز کے منحنی

$$(a^2 + b^2) r^2 = m^2 \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right) \text{ ہے۔}$$

نیز ثابت کرو کہ جہاں منحنی محور کا کوئی نقطہ ہے وہاں پر منحنی مبداء کی جانب مقعر یا محدب ہو گا جو جب ایسے کہ $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ -

۸ - خط منوبری قطع مکانی کا متغلوب ہے بلحاظ ماسکے کے۔ اس امر کو استعمال کرنے سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ قرن میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے عماد ایک دوسرے سے زاویہ قائم بناتے ہیں اور ان کے تقاطع کو قرن کے ساتھ ملائیو لا خط وتر پر عمود وار ہوتا ہے۔

۹ - تعلیب سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ منوبری خطوط $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = (1 + \text{جم طہ})$ ، $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = (1 - \text{جم طہ})$ ایک دوسرے کو علی التمام کاٹتے ہیں۔

۱۰ - منحنی اور اسکے متغلوب کے متناظر عنصر فرس، فرس ہیں، ثابت کرو کہ فرس: فرس = $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ جہاں $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ سستی نیم قطر ہیں۔

۱۱ - قطع مکانی کا پائیں منحنی بلحاظ راس کے بلحاظی خط (Cissoid)

[دفعہ ۱۱۹ (۱۶) ہے۔]

۱۲ - اگر ایک منحنی کے دو تماس ایک دوسرے سے مستقل زاویہ بنائیں تو ان کے نقطہ تقاطع (پ) کا طریق پ اور دو نقاط تماس میں سے گزرنے والے دائرہ کو کس کرتا ہے۔

۱۳ - ثابت کرو کہ پائیں منحنی کا رقبہ اس ضابطہ $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۴ - ثابت کرو کہ پائیں کی قوس اس ضابطہ $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۵ - قطع ناقص کے پائیں منحنی کا رقبہ ہے $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ جبکہ مرکز قطب ہو اور $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ نیم محور ہوں۔

۱۶ - قطع زائد $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ کا پائیں منحنی بلحاظ مرکز کے دو طوقوں پر

مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک کا رقبہ $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ (ب) مس $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$ ہے۔

۱۷ - اگر دائرہ محدودوں کے مبداء سے اور نقطہ (لام، مام) سے منحنی کے تماس پر

عمود ع اور ع کیچے جائیں تو ثابت کرو کہ

ع = ج - لا، جم سا - واجب سا

جہاں سا عمودوں کا میلان ہے محور کا کے ساتھ -

۱۸ - ایک بند بیضوی منحنی کے دو پائیں منحنی بلحاظ مبدأ و اور ایک نقطہ (لا، م) کے ہیں جبکہ یہ دونوں نقطے منحنی کے اندر واقع ہیں۔ ان پائیں منحنیوں کے رقبے (ب، ا) میں ثابت کر دو

۱۹ - (ب، لا، ا) ج جم سا فرسا - (ا، ج) ع جب سا فرسا + (ا، ب) م

۱۹ - ایک نقطہ کو قطب مان کر اگر ایک بند بیضوی منحنی کا پائیں منحنی لیا جائے تو اس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے، ثابت کر دو کہ نقطہ مذکورہ کا طریق دائرہ ہے - اور مستقل کی مختلف قیمتوں کے جواب میں جو دائرے حاصل ہوتے ہیں وہ ہم مرکز ہیں -

نیز اگر مشترک مرکز ہو تو بلحاظ کسی اور نقطہ پ کے جو پائیں منحنی حاصل ہوتا ہے اس کا رقبہ اس پائیں منحنی کے رقبہ سے جو بلحاظ و کے لیا جائے بقدر دائرہ (نیم قطر د پ) کے رقبہ کے زیادہ ہوتا ہے -

۲۰ - مکملی ما = ۲۷ لا کا منحنی پائیں بلحاظ راس کے منحنی ۲۷ لا = ما (۲۷ - لا) ہے -

۲۱ - کس صورت میں ع = لا جم سا ۹ -

۲۲ - ثابت کر دو کہ جس منحنی کی صورت میں ع = لا جب سا جم سا وہ متساویہ

لا + ما = لا ہے -

۲۳ - بتاؤ کہ مساوات لا + لا = م (مستقل) کو بلحاظ قوس (س) کے تقاطع کرنے سے کیا خاصیت حاصل ہوتی ہے اور نتیجہ کی ہندی طریق پر تصدیق کرو -

۲۴ - گلیسنینی کے بیضوی کے کسی نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا یہ عمل ثابت کرو -

پ سے اور پ سے میں بالترتیب نقطے ق اور ق لوائے کہ پ ق = پ سے اور پ ق = پ سے - جو خط پ کو ق ق کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملاتا ہے وہ مطلوبہ عماد ہے -

- ۲۵ - متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعکس ہونا مطلوب ہے کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزیرے، ثابت کرو کہ انوکھا کسی منحنی قطع مکانی ہے۔
- ۲۶ - متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعطف ہونا مقصود ہے کہ انقطاع کے بعد شعاعیں ایک ثابت نقطہ میں سے گزیریں۔ ثابت کرو کہ انقطاعی منحنی ایک مخروطی تراش ہے اور مخروطی کا مخروط مرکز انقطاع نماؤں کی نسبت کے مساوی ہے۔
- ۲۷ - ثابت کرو کہ کارٹیسری بیضوی کی مسادات اس شکل کی ہے
- $$r^2 - 2r + 1 + b \text{ (جم طہا) } (r + c) = 0$$
- جہاں کسی ماسکہ کو قطب مانا گیا ہے۔
- ۲۸ - ثابت کرو کہ کارٹیسری بیضوی لازماً ایک بند منحنی ہوگا اگر اس صورت کو جس میں منحنی قطع زائد کی ایک شاخ ہے مستثنیٰ کر دیا جائے۔



دوان باب

انحنا

۳۳۳

۳۳۳۔ انحنا کا ناپ - مستوی منحنیات کے نظریہ میں احصا کا جو استعمال ہے اس کے متعلق اب تک ہمیں منحنی کے مختلف نقاط پر ماس کی سمیت کے ساتھ ہی سرورکار رہا ہے، ابھی خاص طور پر ہم نے اس پر غور نہیں کیا کہ کس طرح نقطہ بہ نقطہ یہ سمت منحنی پر بدلتی ہے۔

انحنا کا مضمون کسی غیر متعلق پہلوؤں سے بحث میں لایا جاسکتا ہے اور اگرچہ تمام طریقوں سے بالکل دی خابطے حاصل ہوتے ہیں تاہم طالب علم کے لئے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اساسی طور پر استدلال میں وہ ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔

پہلے طریقہ میں ہم منحنی کی کسی قوس کے ”پورے“ یا ”مکمل“ انحنا کی تعریف سے ابتدا کرتے ہیں، پورا انحنا وہ زاویہ ممف ہوتا ہے جس میں سے ماس گھوم جاتا ہے جبکہ اس کا نقطہ تماس قوس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک سفر کرتا ہے۔

اور قوس کا ”اوسط انحنا“ اس نسبت سے متعین ہوتا ہے جو پورے انحنا کو قوس کے طول (ممف ہس) کے ساتھ ہو پس اس تعریف کے مطابق اوسط انحنا $\frac{\text{ممف ہس}}{\text{ممف ہس}}$ ہے۔

۳۳۴۔ اور طریقہ دفات ۱۳۶، ۱۳۷ میں بیان کئے گئے ہیں۔

اور تعریف کے طور پر بخنی کے ”کسی نقطہ پر پرکا انخما“ اس لانا تھا
چھوٹی قوس کا اوسط انخما خیال کیا جاتا ہے جو اس نقطہ پر منتہی ہوتی ہے۔
پس احصا کی ترتیم کے مطابق کسی نقطہ پر کا انخما

فرسہ
وہو

(۱) سے تعبیر ہوگا۔

ایک دائرہ کی جس کا نیم قطر (ہو) $\text{رف} = \text{رف}$ سا
اور اس لئے $\frac{\text{رف}}{\text{رف}} = \frac{1}{2}$ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دائرہ کا
انحناء اس کے نیم قطر کے شکائی سے ناپا جاتا ہے۔ پس اگر ایک دائرہ کا نیم قطر
س ہو جس کا انحناء ہی ہے جو کسی دے ہوئے سطحی کا نقطہ پ پر ہے تو

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \checkmark$$

۳۳۴
اس نیم قطر در کے دائرہ کو جس کا ماس نقطہ پ پر دی ہو اور جس کا قطر
اسی سمت آیں جو پہلی نخی کا ہے ہم دائرہ انخا کہنے کے اس کے نیم قطر کو نیم
قطر انخا کہا جائیگا اور اس کے مرکز کو انخا کا مرکز۔
اگر نخی کے نقطہ پ سے کسی خاص سمت میں ایک خط مستقیم کھینچا جائے
تو اس خط پر جو طول یہ دائرہ قطع کرتا ہے اسے اس سمت میں کے دو تر انخا کہتے
موسوم کیا جائیگا۔ اگر دوسری سمت عماد کے ساتھ زاویہ طہ بناے تو دوسرا طول
ل اس مساوات سے حاصل ہوگا

ل = ۲ جم طي (۳)

اگر انھما کے مرکز کے قائم حدود (ضما، عا) ہوں تو قائم ظل ڈالنے سے
 ضما = لا۔ ہر جب سنا، عا + ما + ہر جسم سنا (۴)
 بشرطیکہ سنا کا مفر اس مقام سے شرع ہو جہاں فاس لا کے محور کے متوازی
 ہوتا ہے۔

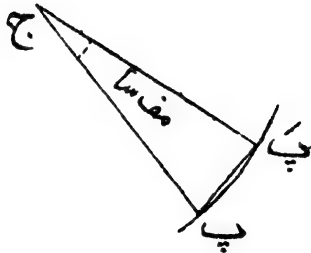
اختیار کامرگز منحنی کے دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

منحنی کے دو متصل نقاط پر پ ج، پ ج دو عماد ہیں اور ان کے درمیان زاویہ
مف سا ہے اور قوس پ ج، پ ج مف سا ہے، تب وتر پ ج
کھینچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (شکل ۱۰۷)

$$\frac{ج پ}{پ ج} = \frac{ج ج پ ج پ}{ج ج مف سا}$$

یا ج پ = ج ج ج پ پ ج پ ج مف سا × ج ج مف سا × مف سا
جب پ کو پ ج کے لانا تھا قریب لیا جائے تو بائیں جانب کے ہر جزو ضرب
کی انتہا ایک ہوتی ہے سوائے مف سا کی انتہا کے۔ پس آخر الامر

$$ج پ = \frac{فرس}{فرسا} = r$$



شکل (۱۰۷)

جدید مہندسہ میں ہم یوں خیال کرتے ہیں کہ منحنی کی تکوین دو طرح سے عمل میں
آتی ہے ایک تو یہ ایک نقطہ کا طرئی ہو سکتا ہے دوسرے یہ ایک خط مستقیم کا
لفاف ہو سکتا ہے (صفحہ ۱۴۱)۔ حرکت کے ان متعلق عنصر اول کے کسی مسلسل

کے باہمی رشتہ کو بیان کرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ پر نیم قطر اخٹا (فرس) مضمون جائے تو نقطہ کی حرکت

اگر کسی نقطہ پر نیم قطر اخراجا (فرس) مقرر ہو جائے تو نقطہ کی حرکت ۳۳۵

بالترتیب دو اجزاء میں تحلیل کیا جائے ایک ماس کی سمت میں اور دوسرے
غواہ کی سمت میں تو ہوا جزو قرار رکھتا ہے اور دوسرا حرکت کی سمت پر

یہیں جہاں ۷ = $\frac{\text{فرس}}{\text{ذات}}$ ۔ اس طرح ص کی قطری اور عمودی رفتاریں بالترتیب

ہونگی (دفعہ ۱۱۲) (۶) $\frac{\text{فرع}}{\text{وقت}}$ اور $\frac{\text{فرع}}{\text{وقت}}$ (۵)

فرع
وقت اور ع
فرسہ
وقت (۵)

اور یہ رفتار میں تغیر کی شرح میں ذرہ کے مدار کے واس اور عمار کی سمیت میں
 اور چونکہ $\frac{6}{\text{رفت}} = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرسہ}} \times \frac{\text{فرسہ}}{\text{رفت}} = \frac{6}{\text{رفت}} \times \frac{6}{\text{رفت}}$ (۶)
 یا آخر کا جو ترکیبی ' رفتار کے مربع اور انحناء کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۱۳۴۔ منحنی کی ذاتی مساوات۔ ضابطہ $\frac{y}{x} = \frac{f(y/x)}{g(y/x)}$ فرم میں فوراً لگ سکتا ہے اگر منحنی زیر بحث کے لئے y اور x کا باہمی رشتہ اس شکل میں معلوم ہو

پہنچنے کی ”ذاتی مساوات“ کہلاتی ہے کیونکہ اسکی شکل میں مغنی کے باہر کے مکانی عنصر شریک نہیں ہوتے۔ اس میں اختیاری عنصر صرف مس کا مبدأ اور مسا کا مبدأ ہیں اور ان میں سے کسی ایک میں تبدیلی کا اثر صرف یہ ہوگا کہ متناظر تغیر میں ایک مستقل کا اضافہ ہو جائیگا۔

استعمال ہو سکتا ہے یا خاص صورتوں میں خاص ترکیبیں عمل میں لائی جاسکتی ہیں دیکھو ذیل کی مثالیں ۴ اور ۵۔

۳۳۶ - مثال ۱ - زنجیرہ میں

س = اس سا (۳)

نہیں ہے۔ $s = \text{واقط}^2 \text{ سدا} = \text{ماقط}^2 \text{ سدا}$ (۴)
 دفعہ ۱۲۰ کی ترقیم کے موافق۔ اس دفعہ کی شکل کے حوالہ سے معلوم ہوگا کہ نیم قطر اخلا
 عماد بیگ کے مساوی ہے۔

مثال ۲۔ خط تدویر (cycloid) (صفحہ ۱۲۲) میں

س = ۴ جب سب (۵)

اور اس لئے $۴ = ۱$ و $۲ = ۱$ جم مسا (۶)
اس لئے اصل ۹ میں $۷ = ۲$ پے یعنی انہما کا نیم قطر عار کا دو چہ ہے۔

مثال ۳- برتدویر (Epicycloid.) دفعہ ۱۲۳ (۱۱) میں

$$\text{مس} = \frac{۲(ب+۱)ب}{۱} \text{ جب } \frac{۱}{ب+۱} \text{ سا} \dots\dots\dots (۷)$$

$$\text{اور اس لئے ک} = \frac{۲(ب+۱)ب}{ب+۱} \text{ جم } \frac{۱}{ب+۱} \text{ سا}$$

$$\dots\dots\dots (۸) \quad \frac{۲(ب+۱)ب}{ب+۱} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ فسا} =$$

اس لئے شکل ۸۱ (دفعہ ۱۲۳) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ

$$\dots\dots\dots (۹) \quad \frac{۲(ب+۱)ب}{ب+۱} \text{ پے} =$$

جہاں پ ہے عماد کا طول ہے مرکز نقطہ اور ثبات دائرہ کے درمیان۔

$$\dots\dots\dots (۱۰) \quad \text{مثال ۴- مکانی} \quad \frac{۲}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ میں} \quad \frac{۲}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ مہم سا} \dots\dots\dots$$

$$\text{جس سے جب سا} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = - \frac{۱۲}{\text{جب سا}} \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$$

$$\dots\dots\dots (۱۱) \quad \frac{۱۲}{\text{جب سا}} = -$$

منفی علامت کا یہ مفہوم ہے کہ لکھا گھٹتا ہے جیسے میں بڑھتا ہے۔

$$\dots\dots\dots (۱۲) \quad \text{مثال ۵- اگر قطع ناقص} \quad \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ جم فسا} \quad \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ ب جب فسا} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots (۱۳) \quad \text{کو دائرہ} \quad \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ جم فسا} \quad \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ ب جب فسا} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots (۱۴) \quad \text{کا قائم ظل تصور کیا جائے تو} \quad \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{۱}{۱} \text{ بفا} \dots\dots\dots$$

۳۳۲ جہاں بفا فردیج نیم قطر ہے کیونکہ توس کا عنصر و مف فسا سے بدگر مف میں

ہو جاتا ہے اور تناواری نیم قطر سے بدگر بفا ہو جاتا ہے۔ نیز چونکہ $\frac{۱}{۱}$ بفا مف سا

اور $\frac{۱}{۱}$ و مف فدا رقبہ کے متناظر عنصر میں اس لئے

$$\text{بفا مف سا} = \frac{\text{ب}}{۱} \text{ و مف فدا}$$

$$(۱۵) \dots\dots\dots \frac{بہا}{اب} = \frac{فرقا}{فرسا} \quad یا$$

$$(۱۶) \dots\dots\dots \frac{بہا}{اب} = \frac{فرسا}{فرقا} \times \frac{فرسا}{فرقا} = \frac{فرسا}{فرقا} = \frac{فرسا}{فرقا} = \frac{فرسا}{فرقا}$$

اگر ماسی خط پر مرکز سے عمود ع ہو تو ع بہا = اب اور اوپر کا نتیجہ اس طور پر لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۷) \dots\dots\dots \frac{بہا}{ع} = \frac{اب}{ع} \quad یا \quad \frac{بہا}{ع} = \frac{اب}{ع}$$

چونکہ ع = لجم سا + ب جب سا = ل (۱- ز جب سا)

موزا لہ ذکر صورت اس شکل کے معادل ہے (ز خروج مرکز ہے)

$$(۱۸) \dots\dots\dots \frac{بہا}{ع} = \frac{اب}{ع} \quad یا \quad \frac{بہا}{ع} = \frac{اب}{ع}$$

اس ضابطہ سے ارضیات (Geodesy) میں ایک مشہور نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر زمین کی شکل کو گردش کا ناقص نا خیال کیا جائے تو ز کو نظر انداز کرنے سے عرض بلد سا کی قوم میں نیم قطر انحناء کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$(۱۹) \dots\dots\dots \frac{فرسا}{فرسا} = \frac{ل (۱- ز + \frac{۳}{۲} ز جب سا)}{ل (۱- ز - \frac{۳}{۲} ز جب سا)} = \frac{ل (۱- ز + \frac{۳}{۲} ز جب سا)}{ل (۱- ز - \frac{۳}{۲} ز جب سا)}$$

جہاں صہ = $\frac{ل - ب}{ل} = \frac{۱}{۲} ز$ یعنی صہ سے نصف النہار کی ناقصیت

(Ellipticity) تعبیر ہوتی ہے (۱۹) کو تکمیل کرنے سے نصف النہار کی ناقصیت

کا طول استواء سے عرض بلد سا تک حاصل ہوتا ہے

$$(۲۰) \dots\dots\dots \frac{ل (۱- ز + \frac{۳}{۲} ز جب سا)}{ل (۱- ز - \frac{۳}{۲} ز جب سا)} = \frac{ل (۱- ز + \frac{۳}{۲} ز جب سا)}{ل (۱- ز - \frac{۳}{۲} ز جب سا)}$$

مثال ۶ - مساوی الزاویہ لوبی (دفعہ ۱۲۶) میں

$$(۲۱) \dots \dots \dots \text{سا} = \text{ط} + \text{ع} \dots \dots \dots$$

$$\text{اس سے} \quad \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرط}}{\text{فرس}} = \frac{\text{جب ع}}{\text{ر}}$$

$$(۲۲) \dots \dots \dots \frac{\text{ل}}{\text{جب ع}} = \text{ا} \dots \dots \dots$$

پس نیم نظر انحن کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۵۔ نیم قطر انحن کے لئے ضابطے۔ انحن کا ضابطہ $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$

آسانی سے کئی اور صورتوں میں بیان کیا جاسکتا ہے۔
(۱) قائم کارٹیزی محدود میں

$$(۱) \dots \dots \dots \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{س سا} \dots \dots \dots$$

$$۳۳۸ \quad \text{اسکے قطر سا} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} = \text{جم سا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\text{ر}} \dots \dots \dots \text{جس سے}$$

اس شکل سے پھر ظاہر ہے کہ نقطہ العطف پر، جہاں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} =$
(دفعہ ۶) انحن صفر ہوتا ہے۔

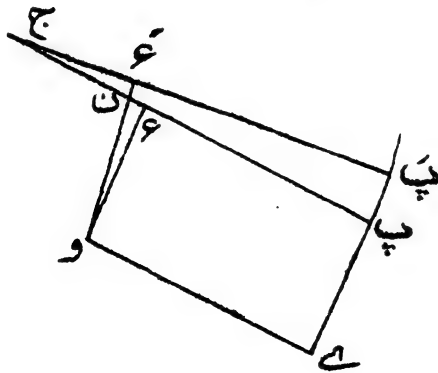
جب، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ایک چھوٹی مقدار ہو تو ضابطہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے
تقریباً

$$(۳) \dots \dots \dots \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ر}} \dots \dots \dots$$

اور تناسبی خطا ہمیں دوسرے رتبہ کی ہوگی۔ مریجاً یہ ضابطہ $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$ کی نقل ہے کیونکہ جب 'سا' چھوٹا ہو تو 'سا' کی بجائے $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرلا}}$ (د مس سا) لکھا جاسکتا ہے اور $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$ کی بجائے $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}$ ۔ سلاخوں کی غمیدگی کے نظریہ میں اس ضابطہ کا استعمال بہت اہمیت رکھتا ہے۔
(۲) دفعہ ۱۳۱ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ نیم قطر کا ظل (ص) ماس پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ص} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}} \dots \dots \dots (۳)$$

اگر مبدأ سے دو متصل عمادوں پ ج پ ج پر عمود و ع و ع ہوں اور اگر و ع پ ج سے ن پر ملے تو بالآخر
و ع - و ع = ع ن = ج ن م ف سا یا م ف ص = ج ن م ف سا



شکل (۱۰۸)

۳۳۹ اس لئے ج ع یا ج ن کی انتہائی قیمت $\frac{\text{فرص}}{\text{فرسا}}$ ہے جس سے

(۵) $\frac{فرص}{فرسا} = ع + ج = ع + \frac{فرص}{فرسا} + ع$ (۵)

(۳) دفعہ ۱۱۲ کی ترقیم کے موافق

(۶) $\frac{ص}{ر} = جم فسا = \frac{فرر}{فرس}$ (۶)

چونکہ $\frac{فرس}{فرسا} = \frac{فرس}{فرر} \times \frac{فرر}{فرع} = \frac{فرس}{فرسا} \times \frac{فرر}{فرع}$ (۶)

اس سے حاصل ہوتا ہے

(۷) $\frac{ر فرر}{فرع} = ص$ (۷)

یہ ضابطہ بڑی سہولت سے استعمال ہو سکتا ہے جب ماسی قطبی مساوات (دفعہ ۱۲۹) معلوم ہو۔

(۸) $مِشال ۱ - زنجیر = ما = وجمن \frac{لا}{ر}$ (۸)

کی صورت میں

$\frac{فرسا}{فرلا} = جمن \frac{لا}{ر} ، \frac{فرسا}{فرلا} = \frac{ا}{ر} جمن \frac{لا}{ر} + ۱ + \frac{فرسا}{فرلا} = جمن \frac{لا}{ر}$

اس لئے $ص = وجمن \frac{لا}{ر} = \frac{ما}{ر}$ (۹)

چونکہ $ما = دقسط سا$ ، اس لئے نتیجہ (۹) دفعہ ۱۳۴ مِشال ۱ کے مطابق ہے۔

(۱۰) $\frac{۲۴}{ر} = ر$ مِشال ۲ - مکانی میں

(۱۱) $\frac{ر فرر}{فرع} = \frac{ع ۲}{ر} = \frac{ع ۲}{ر}$ (۱۱)

مِشال ۳ - مرکز دائرہ انہوں میں (دفعہ ۱۲۹، مِشال ۴)

$$\frac{ؤب}{ع} = ب \pm ل \mp ر \dots\dots\dots (۱۲)$$

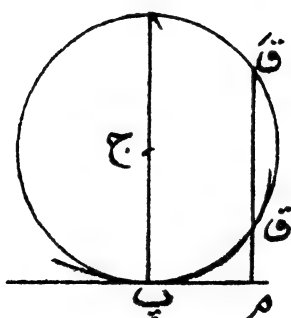
$$\dots\dots\dots \frac{ؤب}{ع} \pm \dots\dots\dots (۱۳)$$

مقابلہ کرد دفعہ ۱۳۴ مثال ۵۔

۱۳۶۔ نیوٹن کا طریقہ۔ انحنایہ بحث کرنے کا ایک اور طریقہ

ہے جسے نیوٹن نے استعمال کیا۔ اس میں ایک دائرہ کھینچا جاتا ہے جو
مختصی کو پ پر کزتا ہے اور ایک پاس کے نقطہ ق میں سے گذرتا
ہے۔ اس کے بعد اس دائرہ کے نیم قطری انتہائی قیمت معلوم کی جاتی ہے
جبکہ ق پ کے لا انتہا قریب آجائے۔

یہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ انتہائیں یہ دائرہ بالکل وہی ہے جو پ پر کا
انحنایہ کا دائرہ ہے اور جس کی تعریف دفعہ ۱۳۳ میں کی گئی ہے۔



نخل (۱۰۹)

کیونکہ اگر ج مرکز ہو تو ج پ = ج ق اور اس لئے پ اور ق کے

درمیان کوئی نقطہ پ ایسا ضرور ہوگا کہ اس کا فاصلہ ج سے اعظم یا اقل ہو اور اسلئے ایسا کہ ج پ مغنی کا عماد ہو۔ اتہا میں پ پ کے آلتہا قریب آجاتا ہے اور ج متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع "مرکز انحناء" پر منطبق ہوتا ہے نیوٹن کے طریقہ سے نیم قطر انحناء کے لئے ایک نہایت سادہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ پ پر کے ماس پر ق ق م ایک عمود کھینچا گیا ہے جو دائرہ سے پھر ق پر اور ماس سے م پر ملتا ہے۔ چونکہ

$$م پ' = م ق \times م ق' \text{ اس لئے}$$

$$۷۲ = ۷۵ م ق' = ۷۵ \frac{م پ'}{م ق} \dots (۱)$$

اگر ق ق م کو اس طور پر کھینچا جائے کہ یہ پ پر کے عماد کے متوازی ہونے کی بجائے اس عماد کے ساتھ ایک معلومہ میلان رکھے تو کسر (۱) کی انتہائی قیمت سے مماثل سمت میں وتر انحناء حاصل ہوگا۔ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ کسی خاص سمت میں وتر انحناء خاص سہولت کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے اس کے بعد نیم قطر انحناء ضابطہ (۲) دفعہ ۱۳۳ سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً کارٹیز میں محدودوں میں نیم قطر انحناء کے لئے ضابطہ مستطیل ہو سکتا ہے بحوالہ شکل ۴۲ صفحہ (۲۱۲) محور ماس کے متوازی وتر انحناء کو ق سے تعبیر کرو

$$تو \frac{۱}{ق} = ۷۵ \frac{ق}{پ} = ۷۵ \frac{ق}{ج} \text{ جم' سا}$$

$$= \frac{۱}{۴} \text{ فٹا (۱) جم' سا} \dots (۲)$$

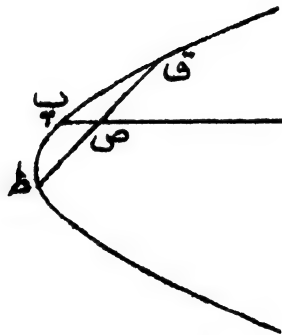
جہاں سا پ پر کے ماس کا میلان محور کا کے ساتھ ہے۔
چونکہ ق = ۷۵ جم' سا ماس سا = فٹا (۱)
اس لئے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{r} = \text{فمّا (۱) جم}^2 \text{سا} = \frac{\text{فمّا (۱)}}{\frac{1}{r} [2 \{ \text{فمّا (۱) \} + 1]}{r}} \dots (۳)$$

اور یہ ضابطہ (۲) دفعہ ۱۲۵ کے بالکل مطابق ہے، صرف ترتیم کا فرق ہے۔

مثال ۱۔ قطع ناقص میں فرض کر دو کہ وتر ق ط ' پ پر کے ماس کے متوازی ہے اور پ میں سے گزرنے والے قطر سے ص پر ملتا ہے (شکل ۱۱۰) نیچے کے ہندسکی رو سے

$$\text{ق ص}^2 = \text{م س پ} \times \text{پ ص}$$



شکل (۱۱۰)

جہاں م س ماسکہ ہے۔ اس لئے محور کے متوازی وتر ناقص کے لئے

$$\text{ق} = \text{نسا} = \frac{\text{ق ص}^2}{\text{پ ص}} = \text{م س پ} \dots (۴)$$

اگر پ پر کا ماد محور کے ساتھ زاویہ طہا بنا لے تو جم طہا = $\frac{\text{م س}}{\text{پ ص}}$

جہاں م س ماسکہ ہے پ پر کے ماس پر محور ہے اسلئے

$$r = \frac{1}{p} \text{ ق ق ط طہا} = \frac{\text{م س پ}^2}{\text{م س}} = \frac{\text{م س پ}^2}{\frac{1}{r}} \dots (۵)$$

باتتے ہیں کہ $\text{جم طہ} = \frac{\text{ج} ۱}{\text{ج} ۱}$ جہاں ۱ محور اعظم کا سر ہے۔ اس لئے کسی ایک ماسک میں سے گزرنے والا وتر انخا (ق) حاصل ہوتا ہے

$$\text{ق} = ۲ \text{ جم طہ} = ۲ \frac{\text{ج} ۲}{\text{ج} ۱} \dots \dots \dots (۸)$$

مثال ۳۔ خط تدویر لا = لا (طہ + جب طہ) ما = لا (۱ + جم طہ) (۹) کے راس پر نیم قطر انخا (س) دریافت کرو۔

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{ما}^۲} = \text{لا} (\text{طہ} + \text{جب طہ}) \div ۲ \text{ جب طہ} = \frac{\text{لا}^۲}{۲} \div (\text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{\text{ما}^۲}) = \left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} \right)$$

$$\text{اس سے س} = \text{س} = \frac{\text{لا}^۲}{\text{ما}^۲} = ۲ \dots \dots \dots (۱۰)$$

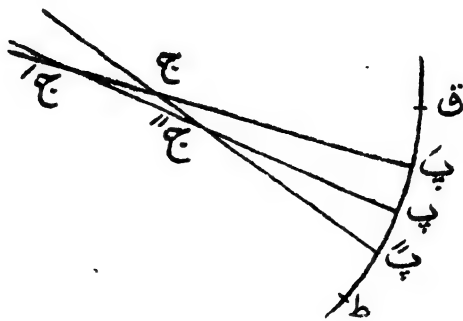
۱۳۷۔ لشمی دائرہ (Osculating circle)

انخا پر بحث کرنے کا ذرا مختلف طریقہ ”لشمی دائرہ“ کے تحصیل پر مبنی ہے۔ اگر منحنی پ کے ق کے قریب دو نقطے ق اور ط ہوں جہاں ایک نقطہ پ کے ایک طرف واقع ہے اور دوسرا دوسری طرف تو دائرہ پ ق ط کے نیم قطری انتہائی قیمت پر ہم غور کرتے ہیں جبکہ ق اور ط دونوں پ کے لا انتہا قریب آ جاتے ہیں۔

اگر منحنی زیر بحث کا انخا پ پر مناسل ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ دائرہ انتہا میں ”دائرہ انخا“ پر منطبق ہونا ہے کیونکہ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز ج ہو تو پ اور ق کے درمیان ایسا نقطہ پ ضرور ہوگا کہ ج پ معلومہ منحنی پر عماد ہو اور اسی طرح ایک نقطہ پ قاط پ اور ط کے درمیان ایسا ہوگا کہ ج پ منحنی پر عماد ہو۔ فرض کرو کہ پ ج اور پ ج

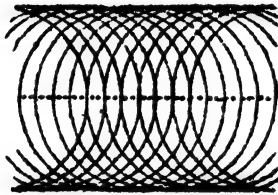
یہ شرط ضروری نہیں لیکن اس ثبوت میں سہولت پیدا ہوتی ہے اور حلہ معمولی شرطیں اس سے بڑی ہوتی ہیں۔

نقطہ پ کے عماد سے بالترتیب ج اور ج پر ملتے ہیں۔ شرط مذکورہ بالا کی رو سے



استعمال ہو سکتا ہے۔
۱۳۸۔ لفاف۔ فرض کرو کہ منحنیات کا ایک واحد لاتناہی نظام یا قیل ہے اور اس قیل کے الگ الگ منحنی ایک مستقل کو جو قیل کی تخصیص کرتا ہے مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

نظام کے کوئی دو منحنی بالعموم ایک دوسرے کو قطع کرینگے لیکن یہاں ہم بالخصوص نقاط تقاطع کے انتہائی مقامات پر بحث کرینگے جبکہ مستقل (یا جسے نظام کا متبدل (parameter) بھی کہتے ہیں) میں تبدیلی لا انتہا کم ہو جب ہم ایک منحنی سے دوسرے منحنی تک جائیں۔ اس طرح عام طور پر ایک یا زیادہ انتہائی نقاط تقاطع ہر ایک منحنی پر ہونگے جہاں پر یہ ساتھ کے منحنی کو کاٹتا ہے۔ ان انتہائی نقاط تقاطع کا طریق نظام کا "لفاف" کہلاتا ہے مثال ۱۔ معلوم نصف قطر کے دائروں کا ایک نظام ہے، ان کے مرکز ایک دے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اس جگہ متبدل مرکز کا محدود ہے۔



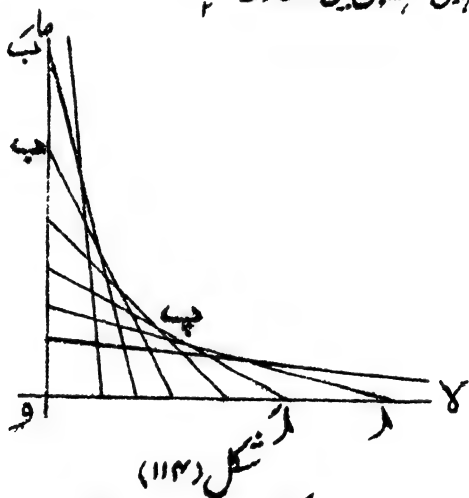
شکل (۱۱۳)

اگر نظام کے دو دائروں کے مرکز ج، ج' ہوں تو ان کے نقاط تقاطع کو ملانے والا خط ج ج' علی القوائم تصنیف کرتا ہے۔ اس لئے کسی دائرہ کے انتہائی نقاط تقاطع ساتھ کے دائرہ کے ساتھ اس قطر کے سرے ہیں جو مرکزوں کے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔ اس لئے لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے جو مرکزوں کے ملانے والے خط کے متوازی ہیں اور اس سے معلوم نہیم قطر کے فاصلہ پر واقع ہیں۔

۲۴۳

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم ہے جو محور کے ساتھ ملے مستقل رقبہ (م) کا مثلث بناتا ہے۔ خط کے دو محل ا، ب، ا، ب' ہوں جو ب پر قطع کرتے ہیں

ثالث $ا پ' ا' ب' پ' ب' مساوی ہیں اس لئے$
 $پ' ا' x پ' ا' = پ' ب' x پ' ب'$
 اس لئے آخر الامر جب $ا' ا' لا انتہا چھوٹا ہو تو پ' ا' ب' کا وسطی نقطہ ہو گا۔ اگر (لا' ما')$
 نقطہ پ کے عدد ہوں اور محوروں کا درمیانی زاویہ $مسہ$ ہو تو
 $و ا' = ۲ لا' و ب' = ۲ ما'$ اس لئے
 $۲ لا' واجب مسہ = ۲ م$
 اس لئے لفاف قطع زائد ہے جس کے تقارب حوالہ کے محور ہیں۔ شکل ۱۱۴ سے اس
 صورت کی توضیح ہوتی ہے جس میں $مسہ = \frac{۱۱}{۴}$



۱۳۵۴۔ لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ۔

فرض کرو کہ نظام کے کسی منحنی کی مساوات ہے

(۱) $= ف (لا' ما' عا)$

جہاں $عا$ متبدل ہے۔ جن نقطوں پر یہ نظام کے دوسرے منحنی

(۲) $= ف (لا' ما' عا)$

کو قطع کرتا ہے ان نقاط پر صریحاً

$ف (لا' ما' عا) - ف (لا' ما' عا)$
 $-----$
 $عا - عا$
 (۳) $=$

جب تغیر عہ ۔ عہ لا انتہا کم ہو تو یہ آخری مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}} = \text{فہ} (\text{لا}^1 \text{ما}^1 \text{عہ}) = 0 \dots (۴)$$

۳۴۵ جہاں $\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}}$ بلحاظ عہ کے جزوی تفرق کی علامت ہے دیکھو دفعہ

انتہائی تقاطع کے نقطہ یا نقاط کے محدود (۱) اور (۴) کو بطور ہمزاد مساواتوں کے مل کر نئے سے حاصل ہوتے ہیں اور انتہائی نقاط تقاطع کا طریق ان مساواتوں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دفعہ ۱۳۸ مثال ۱ کے دائرے اس مساوات سے تغیر ہوتے ہیں

$$(\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{ما}^2 = \text{لا}^2 \dots (۵)$$

بلحاظ عہ کے تفرق کرنے سے

$$\text{لا} - \text{عہ} = 0 \dots (۶)$$

(۵) اور (۶) کے درمیان عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \pm \text{لا} \dots (۷)$$

جو مطلوبہ لغاف ہے۔

مثال ۲۔ اگر ذرہ مبدأ سے زاوی ارتفاع طہ پر ایسی رفتار سے پھینکا جائے جو بلندی ب "کی وجہ" سے ہے تو مکانی راستہ کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \text{لا} \text{س طہ} - \frac{1}{g} \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} \text{قط طہ} \dots (۸)$$

جہاں $\text{لا}^1 \text{ما}^1$ کے محور بالترتیب افقی اور انتہائی ہیں۔ س طہ کی بجائے عہ کہنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{عہ} \text{لا} - \frac{1}{g} \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} (1 + \text{عہ}) \dots (۹)$$

خلف ارتفاع یعنی عہ کی مختلف قیمتوں کے لئے راستوں کا لغاف معلوم کرنے کے لئے ہم بلحاظ عہ کے (۹) کو تفرق کرتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ (لا' ما' عا) } =$$

یہ مساوات پوری ہوتی ہے (لا' عا' = ۲) یا (لا' عا' = ۲) سے پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے (ما' = ۱) اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مبدأ طریق کا ایک حصہ ہے اور یہ ایسے ہی ظاہر ہے۔ دوسرے نتیجہ سے 'عا' ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ (ب' ما' عا) } =$$

یہ ایک قطع مکانی ہے جس کا محور انتصابی ہے، اس کا اسکے مبدأ پر ہے اور اس کا رأس بلندی ب پر ہے۔

۱۴۰۔ جبر یہ طریقہ - اگر مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ (لا' ما' عا) } =$$

۳۴۶ میں فہ' عا' کا منطق صحیح تفاعل ہو تو گزشتہ دفعہ کے قاعدہ کی اور طرح سے بھی تحقیق ہو سکتی ہے۔ اگر لا' ما' کو کوئی خاص قیمتیں دیا جائیں تو مساوات سے عا' معلوم ہوتا ہے، یعنی اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ نظام کے کونسے منحنی دئے ہوئے نقطہ (لا' ما' عا) میں سے گزرتے ہیں۔ اگر مساوات بلحاظ عا' کے ن ویں درجہ کی ہو تو ان منحنیات (حقیقی یا خیالی) کی تعداد ن ہوگی اور بالعموم یہ ن منحنی مختلف ہوں گے۔ لیکن اگر نقطہ زیر بحث دو متصل منحنیوں کا انتہائی نقطہ تقاطع ہو تو عا' کی دو قیمتیں منطبق ہوں گی۔ دفعہ ۵۰ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ عا' میں مساوات کی دوہری اصل کے لئے شرط یہ ہے

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ (لا' ما' عا) } =$$

تاریخی نقطہ نظر سے یہ مسئلہ دلچسپ ہے کیونکہ یہ پہلی مثال ہے جس میں منحنی خطوط کے قبیل کا لفاف حاصل کیا گیا (برنولی) لفاف دریافت کرنے کا عام طریقہ لبب نہیں کی ایجاد معلوم ہوتا ہے۔

اس لئے حسب سابق انتہائی تقاطع (۱) اور (۲) کو ہزار مساواتوں کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور لفاف ان مساواتوں سے حاصل کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر مساوات (۱) عام میں درجہ اول کی مساوات ہو تو نظام کا صر ایک منحنی نقطہ معلومہ میں سے گذرتا ہے اور اس صورت میں لفاف نہیں ہو سکتا۔ اس کی مثالیں متوازی خطوط اور ہم مرکز دائرے ہیں۔ مثلاً

(۳) لا + م = عا

(۴) لا' + ما' = عا

اگر (۱) درجہ دوم کی مساوات ہو مثلاً

(۵) پ عا + ۲ ق عا + ر = ۰

جہاں پ، ق، ر متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں تو مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

(۶) پ ر = ق

اس لئے یہ لفاف کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ خود مستقیم لا + عا = ۱

حوالہ کے محور کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ (م) کا مثلث قطع کرتا ہے۔ اس لئے

(۸) عا بہا جب سہ = ۲ م

جہاں سہ محوروں کا میلان ہے۔ بہا کو ساقط کرنے سے متغیر خط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

(۹) عا ما جب سہ = ۲ م + ۲ م لا = ۰

اس امر کو بیان کرنے سے کہ یہ مساوات بلحاظ عا کے مساوی اصلیں رکھتی ہے ہمیں لفاف کی مساوات یہ حاصل ہوتی ہے

(۱۰) لا ما جب سہ = ۲ م

جیسا کہ دفعہ ۱۳۸ مثال ۲ میں حاصل کیا گیا۔

مثال ۲ - زاویہ قائمہ کی ایک ٹانگ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور ۳۴
 رأس ایک ثابت خط مستقیم میں گزرتا ہے دوسری ٹانگ کا لفاف مطلوب ہے۔
 اگر ثابت خط مستقیم محور صاف ہو اور ثابت نقطہ (۱) تو دوسری ٹانگ کی مساوات
 باسانی حاصل ہوتی ہے

$$ما = م لا + \frac{1}{م} \dots (۱۱)$$

جہاں م محور لا کے ساتھ زاویہ میلان کا ماس ہے۔ اس مساوات کو اس شکل میں
 لکھتے ہیں
 ہم دیکھتے ہیں کہ لفاف قطع مکانی ہے

$$ما' = م لا \dots (۱۲)$$

۱۴۱۔ لفافوں کی تراسی خاصیت۔ اوپر کی مثالوں سے

طالب علم ذیل کے مسئلہ کے ادراک کے لئے تیار ہو چکا ہوگا۔
 منحنیات کے کسی نظام کا لفاف (بالمعوم) اپنے ہر نقطہ پر نظام کے متناظر
 منحنی کو مس کرتا ہے۔

$$مساواتوں \quad ف (لا، ما، عا) = \dots (۱)$$

$$اور \quad جف \quad ف (لا، ما، عا) = \dots (۲)$$

سے لا، ما بطور عا کے تفاعل کے حاصل ہوتے ہیں فرض کر دو کہ

$$لا = ف (لا، عا) = \dots (۳)$$

اور مساواتوں (۳) سے لفاف کی تعیین ہوتی ہے۔ اگر (۳) سے لا، ما کی
 قیمتیں مساوات (۱) کے دائیں رکن میں درج کی جائیں تو عا کا ایک تفاعل
 حاصل ہوگا جو شمالاً صفر ہوگا اور اس تفاعل کو لمحاظ عا کے تفرق کرنے سے
 جو نتیجہ حاصل ہوگا وہ بھی صفر ہوگا اس لئے دفعہ ۵۹ (۱) کے قاعدہ کی
 رو سے لازم

$$(۴) \quad \frac{\text{جف فہ فرلا}}{\text{جف لا فرعہ}} = \frac{\text{جف فہ فرما}}{\text{جف ما فرعہ}} + \frac{\text{جف فہ فرما}}{\text{جف فہ فرعہ}} \times \frac{\text{جف فہ فرما}}{\text{جف فہ فرعہ}}$$

اور (۲) کی رو سے یہ ربط ہو جاتا ہے

$$(۵) \quad \dots\dots\dots = \frac{\text{جف فہ فرلا}}{\text{جف لا فرعہ}} + \frac{\text{جف فہ فرما}}{\text{جف ما فرعہ}}$$

$$(۶) \quad \dots\dots\dots = \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرعہ}}}{\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ فرما}}} - \frac{\text{جف فہ فرما}}{\text{جف ما فرعہ}}$$

دفعہ ۶۱ کی رو سے اس مساوات کا دایاں رکن لفاف کے لئے فرما کی

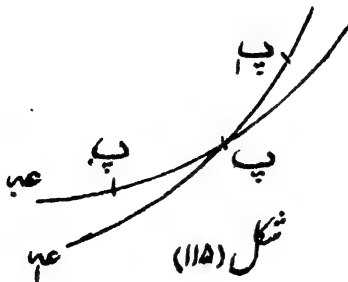
قیمت ہے اور دفعہ ۵۹ (۱۰) کی رو سے بایاں رکن منحنی (۱) کے لئے فرما کی

قیمت کو تعبیر کرتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ انتہائی نقطہ تقاطع پر منحنی (۱) اور لفاف کا تماس وہی ہے۔

۲۴۸

اس مسئلہ کا ہندسی پہلو یوں واضح ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل میں متبدل عہد کی قیمتوں عہد کے جواب میں نظام کے دو منحنیات کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں اور یہ منحنی ایک دوسرے کو چپا پر قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ 'پ' لفاف پر کے متناظر نقطے ہیں یعنی 'پ' کا انتہائی مقام ہے جبکہ 'ع' کو قائم رکھ کے 'ع' کو 'ع' کے لانا انتہا قریب لیا جاتا ہے اور 'پ' کا انتہائی مقام ہے جبکہ 'ع' کو ثابت بلکہ 'ع' کو 'ع' کے لانا انتہا قریب لیا جاتا ہے۔ چونکہ 'ع' کے یہ تفسیر متقابل رنوں میں ہیں اور چونکہ 'پ' کے محدود عام طور پر 'ع' کے متشاکل تفاعل ہوتے ہیں اس لئے 'پ' کے متناظر ٹھاؤ 'پ' اور 'پ' عام طور پر تقریباً متقابل سمتوں میں ہونگے (جبکہ | عہ - عہا | بہت چھوٹا ہو) اور 'پ' 'پ' بڑے منفرجہ زاویہ والا مثلث ہوگا۔ اس لئے آخر الامر جب | عہ - عہا | لانا چھوٹا ہو تو وتر 'پ' اور 'پ' سمت میں منطبق ہوں گے یعنی لفاف کا ماس منحنی کے ماس پر منطبق ہوگا۔ بعض صورتوں میں اوپر کی تحقیق درست نہیں رہتی۔ جہاں تک تحلیل ثبوت کا تعلق ہے یہ ظاہر ہے کہ (۵) سے کوئی نتیجہ مستنبط نہیں ہو سکتا جبکہ نقطہ زیچٹ پر ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \dots \dots \dots (۷)$$

یعنی جبکہ منحنی (۱) کے لئے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت یگانہ طور پر معین نہ ہو سکے۔ یہ خصوصیت ایک "نادر نقطہ" پر پیدا ہوتی ہے خواہ اپنی نوعیت کے لحاظ سے یہ عقدہ ہو یا قرن یا اکیلا نقطہ (دیکھو دفعہ ۱۱۹)۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ قبیل کے نادر نقطوں کا طریق اگر ایسے طریق کا وجود ہو (۱) اور (۲) کے درمیان 'ع' کے حامل انقطاع میں شریک ہو گا لیکن یہ طریق عام طور پر دئے ہوئے معنیوں کو صحیح معنوں میں "مس" نہیں کرتا۔ اس امر کی پوری تحقیق اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن ایک سادہ سی مثال یہاں دی جاتی ہے

تفرق سادات کی کتابوں میں یہ بحث "نادر مل" کے باب کی ضمن میں ملے گی۔

ذیل کے قبیل پر غور کرو۔

(۸) (ما۔ عا) = 2 لا (لا + ب) (۸)
دفعہ ۱۱۹ سے ظاہر ہے کہ نقطہ (۰) عا پر عقدہ ہے، قرن ہے یا اکیلا نقطہ
ہے بموجب اسکے کہ ب مثبت ہے، صفر ہے یا منفی۔ لفاف معلوم کرنے کے
عمل سے حاصل ہوتا ہے ما۔ عا = 1 اس لئے

(۹) لا (لا + ب) = ۰
خط لا = ۰ سے نادر نقطوں کا طریق حاصل ہوتا ہے جو اصلی منحنیوں کو مس
نہیں کرتا۔ بخلاف اس کے خط لا = ۰ ب مس کرتا ہے (اگر ب صفر نہ ہو)
ہندسی بحث میں یہ مان لیا گیا تھا کہ ب کے عین پڑوس میں منحنیات
عا، عا کا کوئی اور تقاطع نہیں ہے۔ عقدہ کی صورت میں عام طور پر دو
متصل تقاطع ہونگے جن کے (لا، محد) (مثلاً) بالترتیب ان شکلوں کے
ہونگے ف (عا، عا) اور ف (عا، عا) لیکن ف (عا، عا)
متبدلوں عا، عا کا متشاکل تفاعل نہیں ہے اس لئے یہ استدلال
عقدوں کے طریق پر عائد نہیں ہوتا۔ نیز قرن کی صورت میں عا یا عا
کلا انتہا چھوٹے تغیر کی وجہ سے نقطہ پ کا ہٹاؤ شکل ۱۱۵ میں رتبہ اول کا
نہیں ہوگا اور عام طور پر نقطے ب اور ب دو دنوں ب کے ایک ہی
جانب ہونے میں۔ اکیلے نقطہ کی پڑوس میں متصل منحنیات کا کوئی حقیقی تقاطع
نہیں ہوتا۔

۱۲۲۔ بریمہ پریمہ - منحنی کا بریمہ (Evolute) اس کے

مرکز انحناء کا طریق ہوتا ہے اور چونکہ مرکز انحناء (دفعہ ۱۳۳) دو متصل عمادوں کا
نقطہ تقاطع ہے اس لئے بریمہ دئے ہوئے منحنی کے عمادوں کا لفاف ہے۔
اسلئے ابتداً الی منحنی کے عماد بریمہ کے تماس ہوتے ہیں۔

* ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۲۱ کے آخر کی مستثنی صورتیں خط مستقیم کے لفاف میں پیدا نہیں ہوتیں۔

- مثال ۱- قطع مکانی $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta$ (۱)
 میں $\Delta = \Gamma\Delta$ ، $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta$ (۲)
 اور (دفعہ ۳۴ مثال ۲) سے

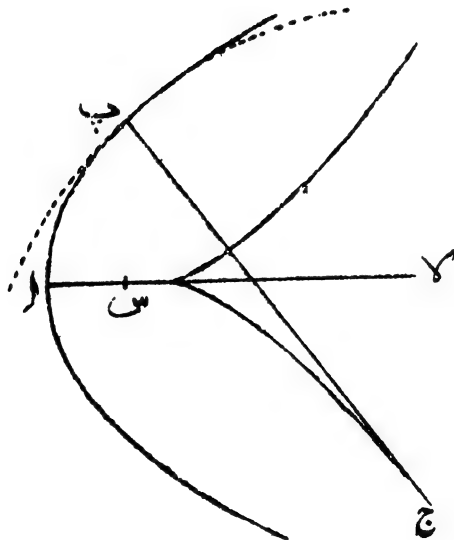
(۳) $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta$

اس لئے انہما کے مرکز کے محدود ہیں

(۴) $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma\Delta = \Gamma\Delta \\ \Gamma\Delta = \Gamma\Delta \end{array} \right.$

اس لئے $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta = \Gamma\Delta$

(۵) $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta$



شکل (۱۱۶)

بظردگر۔ مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ عماد کی مسادات کی یہ شکل

$$(4) \dots\dots\dots 6 = 6 - (12 - 1) = 5$$

اس کا لفاف معلوم کر نیکیئے بلحاظ م کے جزوی تفریق لو اور حاصل کرو

(4) $\varphi(r) = 6$ ' $\varphi(r) = r - 1$

م کے ساتھ کرنے سے نتیجہ (۵) حاصل ہوتا ہے۔ منفی شکل ۱۶ میں دکھایا گیا ہے۔

مثال ۲۔ ناقص (۱) = ارجم فدا، ما = ب جب فدا (۸)
کے کسی نقطہ پر عماد ہے

$$\text{الاولى} - \frac{\text{ب ما}}{\text{حافدا}} = \text{ب} \dots \dots \dots (9)$$

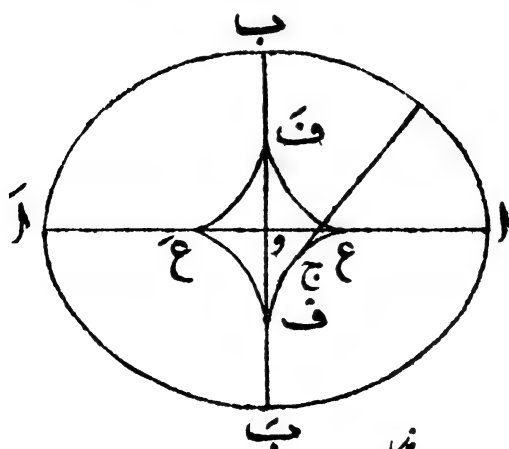
بہارِ وفا کے تفرق کرنے سے

$$\frac{1}{\text{جم}^3 \text{قد}} = \frac{\text{ب ما}}{\text{حب}^3 \text{قد}} = \text{لها} (\text{نفر کر}) \dots \dots (10)$$

(۹) میں دھج کرنے سے $ل = و - ج$ (۱۱)

اس لئے مرکز انحناء کے محدد ہیں

لا = $\frac{1}{2}$ - ب' جم' ف'، ما = $\frac{1}{2}$ - ب' جب' ف' (۱۲)



نمک (۱۱۷)

اور بوجہ ہے (۱۱۱) + (ب ما) = (و - ب) (۱۳) (۱۴)

پہنچی جو ستارہ نما سے قائم ظل کے ذریعہ حاصل ہو سکتا ہے شکل ۱۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط 'ا' ب' 'ا' ب' پر انحناء کے مرکز بالترتیب ہیں

ع، ف، ع، ف

مثال ۳۔ خط تدویر کا بوجہ دریافت کرو۔

خط تدویر 'ا' پ' د (شکل ۱۱۸) کے کسی نقطہ 'پ' پر دفعہ ۱۳۴ مثال ۲ کی رو سے

۳ = ۲ پ' سے (۱۴)

محور 'ا' ب' کو دیکھ کر اتنا بڑھاؤ کہ 'ب' = 'ا' اور 'ت' سے کو بڑھاؤ کہ یہ 'د' میں سے گزرنیوالے 'ب' سے کے متوازی خط سے 'ت' پر ملے۔

'ت' کے قطر پر دائرہ کھینچو اور 'پ' سے کو اتنا بڑھاؤ کہ دائرہ کے محیط سے یہ 'پ' پر ملے تو 'پ' سے = 'پ' سے 'پ' خط تدویر کے نقطہ 'پ' پر

مرکز انحناء ہے۔ چونکہ قوس 'پ' سے قوس 'ت' پ' کے مساوی ہے اور اس لئے 'ب' سے اور 'د' سے کے مساوی ہے اس لئے 'پ' کا طریق صریحاً ایک خط تدویر

ہے جس کا کون دائرہ سے 'پ' سے ہے جو 'د' سے کے نچلے پہلو پر لوگتا ہے اور

مرسم نقطہ 'د' سے لڑکنا شروع ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط تدویر کا بوجہ ایک مساوی خط تدویر ہے اور اس کا قرن 'د' پر ہے۔

نیز دفعہ ۱۲۲ (۴) سے ظاہر ہے کہ تدویری قوس

پ' د = ۲ پ' = پ' پ'

اس لئے قوس 'د' پ' + پ' پ' = مستقل (۱۵)

اس لئے شکل ۱۱۸ کی نچلی تدویر اوپر کی تدویر کا بوجہ (دفعہ ۱۴۴) ہے

جب بھی ایک منحنی کی مساوات ع اور مسا کے رشتہ سے متعین ہو سکے مثلاً

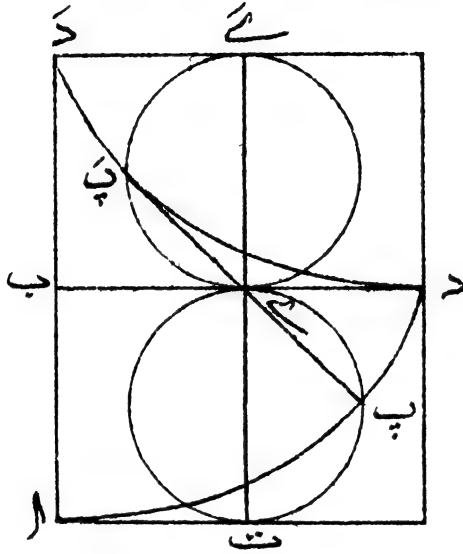
* مثال تدویری رفاص کے نظریہ کی ضمن میں تاریخی نقطہ نظر سے شہور ہے۔ یہ نتائج

ہائیگن (Huyghens ۱۶۴۳) کے ساتھ منسوب ہیں۔

ع = ف (سا) (۱۶)

تو برہمچہ اس مساوات

ع = ف (سا) (۱۷)



شکل (۱۸)

سے حاصل ہوگا بشرطیکہ (۱۷) میں یہ فرض کر لیا جائے کہ سا کا مبدأ ایک قائمہ میں سے آگے کو ہٹا دیا گیا ہے۔ شکل ۱۰۸ صفحہ (۴۶۲) کے حوالہ سے یہ بالکل واضح

ہوگا کیونکہ برہمچہ کے ماس پر بد اسے عمود و ع = پ = ف = فرسہ جبکہ اصلی منحنی کے رموز استعمال کئے جائیں۔

مثال ۴۔ بریادہ تدویر کا برہمچہ دریافت کرو۔

شکل ۸ صفحہ (۴۰۷) میں اگر و سے ت پ پر جو برتد ویر کا نقطہ پ پر ماس ہے عمود ع نکالا جائے تو

$$ع = و ت جم پ = ج = (۱ + ۲ ب) جم \frac{ف}{۲}$$

یا $E = (1+2B) \text{ جم } \frac{1}{1+2B} \text{ مسا } \dots (18)$
 اگر مسا کا مبدأ راس کی بجائے قرن کے جواب میں ہو تو زاویہ کی جیب التمام
 کی بجائے جیب رکنا ہوگی۔
 اس لئے پریمپ کی صورت میں

$$E = - \text{ رجب } \frac{1}{1+2B} \text{ مسا } \dots (19)$$

جسے مسا کے مبدأ کی درستی سے (۱۸) کی شکل میں لایا جاسکتا ہے۔ اس لئے ۳۵۳
 معلوم ہوا کہ پریمپ متشاکل برتدویر ہے جس کے ابعاد اس نسبت $\frac{1}{1+2B}$ سے
 کم کر دئے گئے ہیں۔
 درتدویر کے لئے صرف B کی علامت کو بدل دینا ہے۔*

۱۴۳۔ پریمپ کی قوس۔ کسی منحنی کے کسی دو نقطوں پر
 انحناء کے نیم قطروں کا فرق پریمپ کے متناظر نقطوں کے درمیان کی قوس
 کے مساوی ہے۔
 اس کے ثابت کر نیكے لئے فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نقطوں P اور
 P کے عماد ایک دوسرے سے جج پر ملتے ہیں اور جج اور جج متناظر

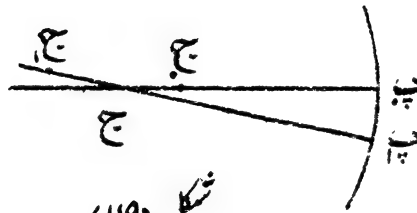
* معائنہ کے بعد معلوم ہوتا ہے کہ مسافات $E = \text{ جم } M \text{ مسا یا } E = \text{ جج جب } M \text{ مسا}$
 بالترتیب مدبر یا درتدویر کو تعبیر کرتی ہے۔ بموجب اسکے کہ $M > 1$ بشرطیکہ دفعہ ۲۳ کی
 تعریف کے مطابق گردتدویروں کو برتدویروں میں شامل کر لیا جائے۔

بمطابق مرکز کے مدبر یا درتدویر کا پائیں منحنی خاص طرز کا بر دور یہ ہے
 جس کی طرف دفعہ ۱۲۵ مثال ۲ میں اشارہ کیا گیا ہے شکل ۹۲ چار

انحنا کے مرکز ہیں۔

دفعہ ۴۱ کی رو سے ج ج ج بالعموم منفرد زاویہ والا مثلث ہے اور جب پ کو پ کے لائنہا قریب لیا جائے تو ج ج + ج ج آخر الامر ج ج کے ساتھ نسبت تساوی رکھتا ہے۔

نیز چونکہ ج سے منحنی پر کے متحرک نقطہ کا فاصلہ نقطہ پ پر اعلیٰ قیمت رکھتا ہے اس لئے ج ج پ اور ج ج پ کے درمیان فرق آخر الامر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور اس لئے نظر انداز ہو سکتی ہے۔ اس لئے ج پ - ج ج پ = ج ج + ج ج = ج ج۔



شکل (۱۱۹)

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ابتدائی منحنی کا نیم قطر انحنا ہو اور برجیہ کی قوس صمدہ تو آخر الامر صف س = صف صمدہ یا

$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{\text{فرس}}{\text{قرصہ}}$$

پس بحکم سے س = صمدہ + صمدہ کی پیمائش کے ابتدا پر منحصر ہے۔ جہاں سے اختیار می مستقل ہے جو صمدہ کی پیمائش کے ابتدا پر منحصر ہے۔

بطور زیورہ دفعہ ۳۲ کی مساواتوں صمدہ = لا - س جب س = عا + س + س مسا (۳)

قرنوں والے بر دوریہ کے پائیں منحنی کو تعبیر کرتی اور شکل ۹۴ چار قرنوں والے درتدیر پائیں کو۔

اسے تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱۱۷) ان میں سے کسی ایک کا طول ہے

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$$

مثال ۲۔ خط دور کی ذاتی مساوات ہے

مس = گ جب سا (۹)

اور دریچہ کی مساوات ہے

صہ = گ جم سا (۱۰)

اس لئے دریچہ مساوی خط دور ہے جیسا کہ پہلے ثابت کیا گیا۔

۱۴۴۔ دریچے اور متوازی منحنی۔ اگر منحنی 'ا' ایک منحنی ب کا دریچہ

ہو تو ب 'ا' کا ایک دریچہ (Involute) ہوگا۔

ایک دریچہ اس لئے کہ کسی ایک منحنی کے بیٹھار دریچے ہوتے ہیں۔ کسی منحنی کا دریچہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ منحنی پر ثابت نقطہ و لو اور اس کے کسی متغیر نقطہ پ پر کے لمس کی سمت میں و سے پرے طول پ ق اتنا لیں کہ

قوس و پ + پ ق = مستقل (۱)

دفعہ ۱۴۳ کے استدلال کو اٹھنے سے یہ باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دے

ہوئے منحنی کے لمس ق کے طریق کے عماد ہیں، اس سے معلوم ہوا کہ

یہ طریق دریچہ کی تعریف بالا کو پورا کرتا ہے۔ "مستقل" کو بدلنے سے ایک

ہی منحنی کے نئی دریچے حاصل ہوتے ہیں۔

عملی مثال کے طور پر ایسا خیال کر دو کہ معلومہ شکل کی کسی مادی قوس پر ایک

سنگا لپیٹ دیا گیا ہے اور اسی کا ایک سر منحنی کے ایک ثابت نقطہ سے

بندھا ہوا ہے۔ رسی کے آزاد حصہ پر کا کوئی نقطہ جو منحنی منقسم کرتا ہے وہ

دریچہ منحنی ہے۔ دراصل اس نام کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔

مثال ۱۔ خط خستہ ری زنجیر کا دریچہ ہے۔ دفعہ ۱۲۰۔

مشال ۲۔ نیم قطر کا دائرہ ہے، اس کے دریچہ میں صریحاً

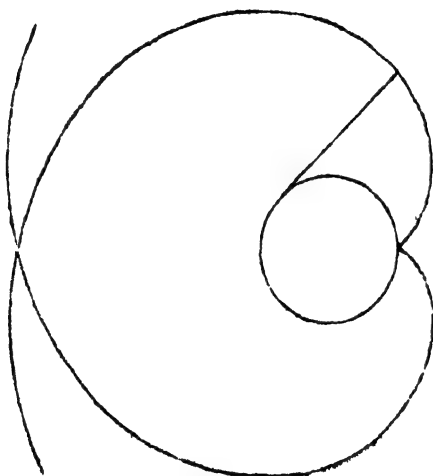
$$\text{فرس} = \text{س} = \frac{1}{2} \text{سا} \dots \dots \dots (۲)$$

اگر سا کے مبداء کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے۔ اسلئے مکمل کرنے سے

$$\text{مس} = \frac{1}{4} \text{سا} \dots \dots \dots (۳)$$

کبھی مستقل کا اضافہ کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگر مس کو قرن (سا = ۰) سے
ناپنا شروع کیا جائے۔

(دائرہ کی) اس خاص صورت میں ظاہر ہے کہ تمام دریچے متطابق طور پر مساوی
اس لئے عام ذکر میں محض دائرہ کا دریچہ کہتے ہیں۔ یہ منحنی شکل ۱۲۰ میں دکھایا گیا ہے



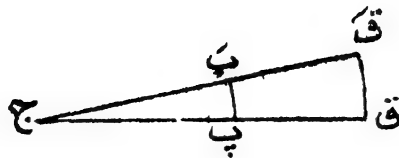
شکل (۱۲۰)

اگر کسی معلومہ منحنی کے عماد پر منحنی سے شروع ہو کر ایک مستقل طول نایا جائے تو
اس طرح جو نقطہ ملے گا اس کا طریق معلومہ منحنی کا ”موازی“ کہلاتا ہے۔

اگر ج پ ج پ منحنی کے متصل عماد ہوں اور متوازی منحنی کے متناظر

نقطے ق اور ق ہوں تو پ ق = پ ق

چونکہ ج پ اور ج پ کا فرق دوسرے رتبہ کی جھولی مقدار ہے اس لئے



شکل (۱۲۱)

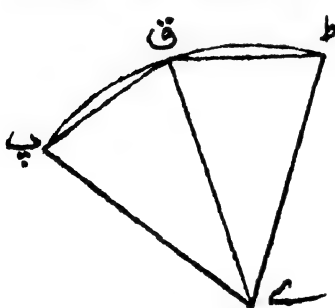
معلوم ہوتا ہے کہ ج ق اور ج ق کا فرق بھی ایسے ہی دوسرے رتبہ کی جھوٹی مقدار ہے اور اس لئے مثلث ج ق ق کے زاوے ق اور ق آخر الامر زاوے قائم ہیں۔ اس لئے ج ق اور ج ق متوازی منحنی کے عماد ہیں۔ اس لئے دو متوازی منحنیات کے وہی عماد ہوتے ہیں اور وہی برجیہ دوسرے الفاظ میں متوازی منحنی ایک ہی منحنی کے درجے ہوتے ہیں۔

برعکس اسکے یہ ظاہر ہے کہ کسی منحنی کے مختلف درجے متوازی منحنیات کا ایک نظام بناتے ہیں۔

۱۲۵۔ متحرک شکل کا فوری مرکز۔ کوئی شکل ہے جسکی بناوٹ

میں تغیر واقع نہیں ہوتا، اپنی سطح میں ایسی شکل کی انتقائیت یا (ہٹاؤ) کا نظریہ ٹھیک طور پر حرکیات سے متعلق ہے، لیکن اسکے چند ہندسی استعمال دلچسپ ہیں۔

اس نظریہ کا پہلا مسئلہ یہ ہے۔ ایسا کوئی ہٹاؤ ایک ایسے گھماؤ کے



شکل (۱۲۲)

معادل ہے جو کسی محدود دیا

لا محدود فاصلہ پر کے ایک

نقطہ کے گرد وقوع پذیر ہوتا ہے۔

ذیل میں اس کا ایک ثبوت

درج ہے۔ پہلے محل میں شکل

کے کوئی دو نقطے (ا ب ہیں

دوسرے محل میں وہی دو نقطے

اے ب پر ہیں کسی تیسرے نقطہ کا یا مقام پ جو ابتدا میں پ پر تھا
 مثلث اے ب ب بنانے سے معلوم ہوتا ہے جو مثلث اے ب ب کے
 بالکل متطابق ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ متحرک شکل کا مقام معین
 کر نیلے لئے صرف دو نقطوں کے مقامات کا تعین کافی ہے۔
 اب شکل کے کوئی سے نقطہ پر غور کرو فرض کرو کہ پ اس کا ابتدائی
 اور ق آخری مقام ہے اور شکل کے اس نقطہ کا مقام ط ہے جو ابتدا میں
 ق پر تھا۔ چونکہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط کے دو محل ہیں اسلئے
 وہ باہم مساوی ہیں۔ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز سے ہو تو مثلث
 ب سے ط ق سے ط متطابق ہیں یعنی نقطہ سے دونوں محلوں
 میں وہی نقطہ ہے۔ اس لئے ہٹاؤ کے گرد گھماؤ کے معادل ہے
 اس نقطہ کو ”گھماؤ کا مرکز“ کہتے ہیں۔

۳۵۷

ایسا ہو سکتا ہے کہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط مستقیم میں ہوں
 ہٹاؤ ایسی صورت میں بغیر گھماؤ کے شکل کے محض نقل مکان کے معادل ہو
 یا دوسرے الفاظ میں یہ کہا جاسکتا ہے کہ گھماؤ کا مرکز لائن ہی پر ہے۔
 اس کے بعد کسی مستوی شکل کی مسلسل حرکت پر غور کرو جو صرف اس کے
 اپنے مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔ شکل کے صرف دو متصل محلوں پر اپنی
 توجہ محدود رکھو۔ پہلے محل سے دوسرے محل میں شکل کسی خاص مرکز سے گزرتی
 گھماؤ کے ذریعہ لائی جاسکتی ہے۔ اس نقطہ کا انتہائی محل جبکہ شکل کے دو مقام
 یا محل ایک دوسرے سے لانتہا قریب ہوں ”فوری مرکز“ کہلاتا ہے۔
 اگر شکل کے ایک ہی نقطہ کے دو متصل محل پ، پ ہوں اور
 گھماؤ کا متناظر زاویہ صف ط ہو تو گھماؤ کا مرکز (دے) ایسے خط مستقیم
 پر واقع ہوگا جو پ پ کی علی القواہم تقصیف کرتا ہے اور زاویہ
 پ سے پ، صف ط کے مساوی ہوگا۔ اس لئے اگر سے سے
 محدود فاصلہ پر کوئی نقطہ پ ہو تو اس کا لانتہا جو ہٹاؤ آخر الامر سے پ
 کے علی القواہم ہوگا اور سے پ، صف ط کے مساوی ہوگا۔

اگر وقت کا عنصر بھی شریک کر لیا جائے اور شکل کے دو محلوں کے درمیان جو وقت کا وقفہ گزرتا ہے وہ صفات سے تعبیر کیا جائے تو $\frac{\text{مفط}}{\text{مفت}}$

کی انتہائی قیمت یعنی $\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$ ”زاویٰ رفتار“ کہلاتی ہے۔ شکل کے اس نقطہ کی رفتار جو فوری مرکز سے مطبق ہوتا ہے صفر ہے اور شکل کے کسی اور نقطہ پ کی رفتار سے پ پر علی القوا ائم ہے اور $\frac{\text{پ}}{\text{فرت}}$

کے مساوی ہے۔ کسی مستوی شکل کی حرکت میں (جبکی وضع یا بنادٹ میں فرق نہیں آتا) مختلف نقطوں کے راستوں پر کے عماد سب کے سب فوری مرکز میں سے گزرتے ہیں۔ یہ امر ہندسی سوالات میں اکثر سودمند ثابت ہوتا ہے اگر شکل کے کسی دو نقطوں کے ہٹاؤں کی سمتیں معلوم ہوں تو فوری مرکز معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ ان عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے جو ان نقطوں کی حرکت کی سمتوں پر پھینچے جائیں۔ اس کے بعد باقی تمام نقطوں کے جو ہٹاؤں ان کی سمتیں اور اضافی مقداریں متعین ہو سکتی ہیں۔

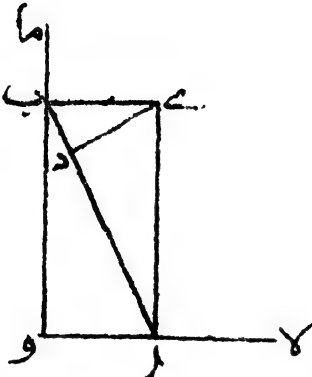
بعد ازیں متحرک شکل میں اگر کوئی خط (سیدھا یا ٹیڑھا) ہو تو ظاہر ہے کہ اس خط کے انتہائی تقاطع کا نقطہ یا نقاط اس کے متصل محل کے ساتھ صرف ان عمادوں کے پائے ہو سکتے ہیں جو فوری مرکز سے خط پر پھینچے جائیں کیونکہ خط کا کوئی اور نقطہ ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہے جو اس کے ساتھ محدود زاویہ بناتی ہے۔

مثال ۱۔ متصل محل کا سیدھا خط (ج ہے) اس کے سرے ”سیدھے“ علی القوا ائم خط ولا، وما مرتسم کرتے ہیں۔

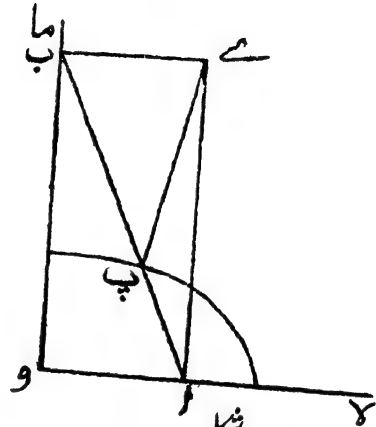
ہم جانتے ہیں کہ خط پر کا کوئی نقطہ پ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کے صدی محور ولا اور وما کی سمتوں میں ہیں۔ اوپر کے مسئلہ سے اس قطع ناقص کے

نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا عمل مائل ہوتا ہے اور وہ یہ ہے۔ و لا اور و ما پر
بالترتیب عمود لے کر 'ب' سے کھینچو' سے فوری مرکز ہے اور سے پ مطلوبہ
عماد ہے۔ دیکھو شکل ۱۲۳۔

۳۵۸



شکل (۱۲۳)



شکل (۱۲۳)

مثال ۲۔ گزشتہ مثال میں متحرک خط 'اب' کا انتہائی تقاطع اس کے متصل مقام
کے ساتھ نقطہ 'د' ہے (شکل ۱۲۳) جو فوری مرکز سے خط 'اب' پر عمود
کا پایہ ہے۔ اب اگر

$$\text{اب} = \text{ل} > \text{و اب} = \text{فد}$$

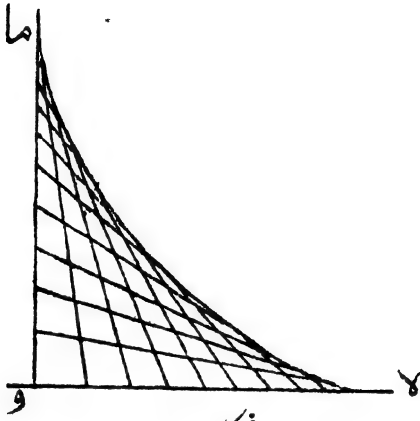
تو د کے محل دیں

$$\text{لا} = \text{ب د جم فد} = \text{ب د جم فد} = \text{ل جم فد} \dots (۱)$$

اس لئے 'اب' کا یقین ستارہ نما

$$\text{لا} = \text{ما} + \text{ل} \dots (۲)$$

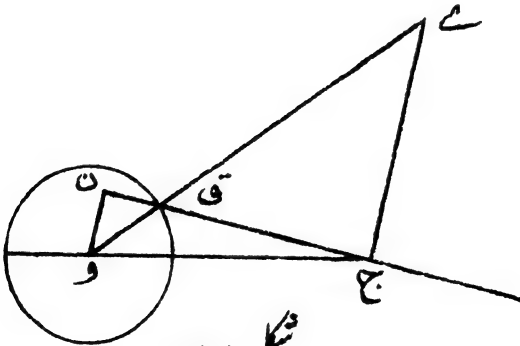
ہے 'مقابلہ کردہ' ۱۲۴ مثال ۴ کے ساتھ۔



شکل (۱۲۵)

مثال ۳۔ ایک بازو وق اپنے ایک سرے و کے گرد زاوی زقار سے کے ساتھ گومتا ہے 'ق پر ایک سلاخ چول کے ذریعہ وصل کردی گئی ہے جو ایک ثابت نقطہ ج میں سے لازماً گذرتی ہے۔ اس سلاخ کی رفتار اس کے طول کی سمت میں مطلوب ہے۔

۳۵۹



شکل (۱۲۶)

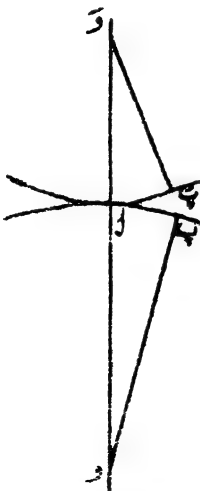
در اصل تنظیم اھتزازی اسطوانہ (Oscillating cylinder) والے بھاپ انجن کے کرنیک اور فشارہ میں پائی جاتی ہے جس میں نقطہ ج اسطوانہ کے چول خط پر واقع ہوگا۔

فوری مرکز وہ نقطہ ہے جہاں وق ممدودہ ج پر فشارہ کی سمت کے عمود
خط کو قطع کرتا ہے۔ اگر سے ج ق (ممدودہ بشرط ضرورت) پر عمود و ن
کھینچا جائے تو سلاخ کے اس نقطہ کی رفتار جو ج پر منطبق ہوتا ہے یہ ہولی
سہ x وق x ج = سہ x وق x وق = سہ x ون ... (۳)

۱۴۶۔ لڑکنے والے منحنیات میں استعمال -

دو مستوی شکلیں ہیں فنڈوں کی بناوٹ غیر متغیر ہے۔ دونوں شکلوں میں
ایک ایک منحنی ثابت طور پر لگا ہوا ہے ایک شکل کا یہ منحنی دوسری شکل سے
منحنی پر بغیر پھسلنے کے لڑکتا ہے۔ ایسی صورت میں ہر شکل کا کوئی نقطہ بلحاظ
دوسری شکل کے ایک منحنی مرئسم کریمیا، منحنی جو اس طور پر مرئسم ہوا ہے گردونہ
کہتے ہیں۔

جن صورتوں میں لڑکنے والے منحنی دائرے ہیں وہ دفعات ۱۲۲ تا ۱۲۴



شکل (۱۲۴)

میں زیر بحث آچکی ہیں۔

گردونیوں کا عام نظریہ علم ہند

اور حرکیات میں اسوجہ سے اہمیت

رکھتا ہے کہ کسی شکل کی کوئی مسلسل

حرکت خود اپنی سطح مستوی میں اس

حرکت پر مشتمل خیال کیا جاسکتی ہے کہ

ایک خاص منحنی جو بلحاظ شکل

ثابت ہے دوسرے ایک

خاص منحنی پر جو بلحاظ سطح

مستوی کے ساکن ہے

لڑکتا ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۹

جب ایک مستوی منحنی ایک

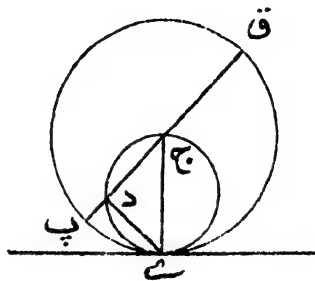
ایسے منحنی پر لڑکتا ہے جو ثابت خیال کیا جاسکتا ہے تو حرکت کا فوری مرکز نقطہ تماس ہے۔
 صغولہ شدت کی شکل میں فرض کیا جائیگا کہ نجلا منحنی ثابت ہے۔ فرض کرو کہ
 (۱) نقطہ تماس ہے اور لا انتہا چھوٹی قوسیں (پ) (پ) (= مف) میں
 دو منحنیوں پر ناپائی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ پ اور پ کے عماد (پ پر کے
 عماد سے نقاط و اور و پر ملتے ہیں۔ تب آخر الامر و = پ اور
 و = پ جہاں پ اور پ دو منحنیوں کے نیم قطر انحنائیں نقطہ پ پر۔
 لا انتہا چھوٹے ہٹاؤ کے بعد پ و و پ کے ساتھ ایک ہی خط مستقیم
 میں آجائیگا اسوقت دونوں منحنی پ پر تماس میں ہونگے۔ اس لئے زاویہ
 (مف طما) جس میں سے لڑکنے والا منحنی پھر گیا اور جو و پ اور
 پ و کے درمیانی مادہ زاویہ کے مساوی ہے و اور و پر کے زاویوں
 کے مجموعہ کے مساوی ہوگا، اسلئے آخر الامر

$$\text{مف طما} = \text{مف س} + \text{مف س} \dots \dots \dots (۱)$$

اب وتر (پ) (پ) آخر الامر مساوی ہیں اور ان کے درمیان
 پ پر لا انتہا چھوٹا زاویہ بنتا ہے، اسلئے فاصلہ پ پ آخر الامر
 مف س میں دو سیمے بنتے ہیں۔ اس سے معلوم ہوتا ہے
 کہ جب مف س کو لا انتہا کم کیا جائے تو گھماؤ کے مرکز (سے) کا
 انتہائی محل (پ) پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ اگر یہ مرکز اس نقطہ سے محدود فاصلہ
 پر ہو تو پ کا ہٹاؤ جو دفعہ ۴۵ کی رو سے پ مف طما کے
 مساوی ہے مف س میں صرف پلے زنبہ کا ہوگا۔

پس جب ایک منحنی ایک ثابت منحنی پر لڑکتا ہے تو ان سب نقطوں کے
 راستوں کے عماد جو متحرک منحنی کے ساتھ تعلق رکھتے ہیں نقطہ تماس میں سے
 گذرتے ہیں۔ اس نتیجہ کی مثالیں اس سے قبل دفعات ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴ میں
 تذویری اور استدارتی ضخیمات کی ضمن میں آچکی ہیں۔ نیز اگر ایک خط مستقیم

کسی منحنی پر لڑکے تو اس کے کسی نقطہ کے راستہ پر یہ خط مستقیم عماد ہوگا (دفعہ ۱۴۴)



شکل (۱۳۸)

اس کے بعد اگر ایسے خط (سیدھے یا تیرے) پر غور کیا جائے جسے لڑکنے والا منحنی ساتھ اٹھائے پھرتا ہے تو اس سوار منحنی کے انتہائی نقاط تقاطع اپنے متصل مقام کے ساتھ ان عمادوں کے پائے ہونگے جو نقطہ تماس سے سوار منحنی تک پہنچ سکتے ہیں۔ اور سوار خط کا لغاف ان پایوں کا طریق ہوگا۔

مثال ۱۔ ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہو تو اس کا کوئی قطر خط عماد کو لغف کرتا ہے۔

لڑکنے والے دائرہ کا مرکز ج ہے، اس کا نقطہ تماس ہے، ع ہے د قطر پ ق پر عمود ہے۔ چونکہ د ایسے دائرہ پر واقع ہے جس کا قطر ج ہے اس لئے یہ دیکھنا آسان ہے کہ اگر چھوٹا دائرہ ہمیشہ بڑے دائرہ کی زاویہ رفتار کے دو چند سے لڑکتا فرض کیا جائے تو ثابت خط کے ساتھ اس کا نقطہ تماس وہی ہوگا اور نقطہ د اس طرح حرکت کریگا گویا چھوٹا دائرہ اسے اٹھائے ہوئے ہے۔

اس لئے اس کا طریق خط تدویر ہے۔

مثال ۲۔ اسی طرح اگر ایک دائرہ (ل) ایک ثابت دائرہ (ج) پر لڑکتا ہو تو ل کے کسی قطر پر کا لغاف الیا "بر" یا در تدویر ہوگا جو ل کے نصف ناب کے دائرہ کو جب کے محیط پر لڑکانے سے پیدا ہو سکتا ہے۔

۱۴۷۔ نقطہ گرد و نیہ کا انخفا۔ فرض کر دو کہ کوئی نقطہ پ بلحاظ لڑکنے والے

منحنی کے ایک ثابت نقطہ ہے، اس نقطہ کے راستہ کا انحناء معلوم کر نیکی لے کر
فرض کرو کہ مے نقطہ تماس ہے اور مے متصل نقطہ تماس ہے اور
پے کا متناظر مقام ہے۔

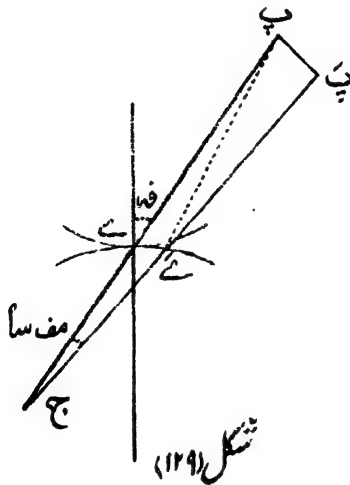
چونکہ لڑکنے والے منحنی کا جو نقطہ مے پر آتا ہے اسکا ہٹاؤ دوسری رتبہ
کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے جس زاویہ میں سے شکل گھوم جاتی ہے وہ اتنی
صورت میں ہے

مف صا = > پ مے پ (۱)

فرض کرو کہ پ کے راستہ کے عماد پ مے اور پ مے خارج ہو کر
ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ مف صا
ہے تو

مف صا = > مے ج مے = $\frac{\text{مف صا} \times \text{ج فم}}{\text{ج مے}}$ (۲)

جہاں فم وہ زاویہ ہے جو مے پ مے پر کے عماد کے ساتھ بنتا ہے



نیز شکل سے مف صا = > پ مے پ - > پ مے

$$= \text{مف لہ} - \frac{\text{مف سی جم فہ}}{\text{پ ے}}$$

$$= \text{مف سی} \left(\frac{1}{\text{پ ے}} + \frac{1}{\text{سی}} - \frac{\text{جم فہ}}{\text{پ ے}} \right) \dots \dots (۳)$$

دفعہ ۱۴۶ (۱) کی رو سے اگر سی اور سی ثابت اور لڑکنے والے منحنیوں کے انخفا کے نیم قطر ہوں۔ (۲) اور (۳) کو مساوی رکھنے سے

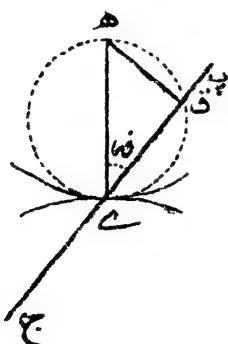
$$\text{جم فہ} \left(\frac{1}{\text{پ ے}} + \frac{1}{\text{سی}} \right) = \frac{1}{\text{سی}} + \frac{1}{\text{سی}} \dots \dots (۴)$$

اس سے ج کا انتہائی مقام یعنی پ کے راستہ کا مرکز انخفا حاصل ہوتا ہے۔ نیم قطر انخفا اس کے بعد حاصل ہوگا

$$\text{غہ} = \text{ج پ} = \text{ج ے} + \text{پ ے} \dots \dots (۵)$$

(۴) اور (۵) میں جو نتیجہ مشتمل ہے اسے سادہ ہندسی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔۔۔ ے پر کے عماد پر طول ے ہ ایسا کاٹو کہ

$$\frac{1}{\text{سی}} + \frac{1}{\text{سی}} = \frac{1}{\text{ہ ے}} \dots \dots (۶)$$



شکل (۱۳۰)

اور ے ہ کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ فرض کرو کہ ے پ اس دائرہ کو

ق پر ملتا ہے۔ تب

$$\frac{1}{\text{ق}} = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{غ}} = \frac{1}{\text{ق}} + \frac{1}{\text{غ}} = \frac{1}{\text{ق}} + \frac{1}{\text{غ}}$$

اس لئے رشتہ (۳) یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\frac{1}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{ق}} + \frac{1}{\text{غ}} \quad (۴)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر 'ق' پر منطبق ہو جائے تو ج سے لا متناہی ہو گا یعنی تحریک شکل کا کوئی نقطہ جو اس دائرہ پر واقع ہو جس کی ابھی تعین کی گئی راستہ کے نقطہ انعطاف پر ہو گا۔ اس وجہ سے دائرہ زیر بحث کو "انعطافوں کا دائرہ" کہتے ہیں۔

(۴) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{ق}} + \frac{1}{\text{غ}} \quad (۵)$$

آخر کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ 'غ' 'ق' کے ساتھ علامت بدلتا ہے یعنی تحریک شکل کے مختلف نقطوں کے راستے سے کی جانب متغیر یا مجذب ہیں بموجب اس کے کہ وہ انعطافوں کے دائرہ کے ایک جانب واقع ہیں یا دوسری جانب۔ اوپر کی معیاری صورت میں یہ راستے سے کی طرف متغیر ہیں اگر پ دائرہ کے باہر ہو اور مجذب ہیں اگر پ اندر ہو۔

استدلالی تخمینات سے جو دفعہ ۱۲۲ صفحہ (۲۰۳) پر دیے گئے ہیں اسکی ایک مثال اس پر آتی ہے۔ اس صورت میں انعطافوں کا دائرہ لڑکنے والے دائرہ کے ناپ کا آدھا ہے۔

۳۶۳

ہم نے معیاری صورت وہ لی ہے جس میں دو منحنی بلحاظ ایک دوسرے کے مجذب ہیں دیکھو اشکال ۱۲۴، ۱۲۹۔ اور کوئی صورت میں اور س کو مناسب علامات دینے سے اوپر کے نتائج میں شریک کر لیا جاسکتی ہے۔ سکونیات میں "جھولنے والے پتھروں" کی حرکت میں اوپر کا نظریہ

استعمال ہوتا ہے۔ جب ایک کھر در جسم فقط ایک نقطہ تماس کے ذریعہ
دوسرے جسم پر ساکن ہوتا ہے تو اس کا مرکز ثقل انتصاباً نقطہ تماس کے
ادیر واقع ہوتا ہے اور توازن کے قائم ہونیکے لئے یہ ضروری ہے کہ
مرکز ثقل کا راستہ کسی لڑکنے کے ہٹاؤ کی صورت میں، اوپر کی جانب
مقصر ہو۔

مثال ۱۔ خط تدویر میں اگر کمون دائرہ کا نیم قطر r ہو تو
 $s = \infty$ ، $r = r$ ، $e = p = 12$ جم فضا
 (۴) میں درج کرنے سے

ج $e = 12$ جم فضا = $e = p$ (۱۰)
 اس لئے $e = 2$ جم فضا = $e = p$ (۱۱)
 مثال ۲۔ برتندویر (دفعہ ۱۲۳) میں

$s = r$ ، $r = r$ ، $e = p = 2$ جم فضا (۱۲)
 جس سے ج $e = \frac{12}{2+1}$ جم فضا = $\frac{1}{2+1}$ جم فضا = $e = p$ (۱۳)

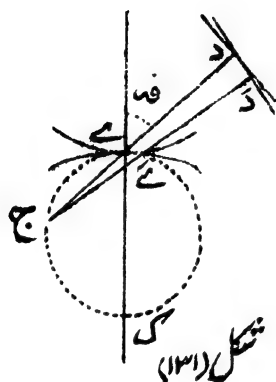
$e = \frac{2(1+p)}{2+p}$ جم فضا (۱۴)

یہ قابل توجہ ہے کہ اگر $b = \frac{1}{p}$ تو $e = \infty$ ، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴
 مثال ۲ کے ساتھ۔

۱۴۸۔ خط گروونیہ (Line Roulette) کا انحن۔ خط گروونیہ کا

انحن یعنی ایک ایسے خط مقیم کے لفاف کا انحن جسے لڑکنے والا انحنی اٹھائے پھرتا ہے
 زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔ خط کے دو متصل مقامات پر فوری
 مرکز کے قناظر مقامات سے (جو فضا میں ہیں) عمود سے دئے گئے
 نکالے گئے ہیں، یہ لفاف کے عماد ہیں اور جو زاویہ یہ اپنے تقاطع (ج
 پر ایک دوسرے سے بناتے ہیں وہ کھٹاؤ کے زاویہ معططما کے مساوی

اگر مے د لڑکنے والے منحنی کے نقطہ مے پر کے عماد کے ساتھ زاویہ
فہا بنا مے اور مے مے = ممف سے تو انتہائی صورت میں
ممف سے جم فہا = ج مے ممف طہا (۱)



اس لئے دفعہ ۱۴۶ (۱) سے مفق طہ کی قیمت درج کرنے سے

جہم فدا = $\frac{1}{\text{سر}} + \frac{1}{\text{سر}}$ (۲)

غنا = ج + ے + ے د (۳)
 لڑکنے والے مخنی کے نقطے پر جو عدا ہے اس پر طول
 مے کی ایسا ٹالو کہ

$$(d) \dots\dots\dots \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

دفعہ گذشتہ میں ناپ کی جو سمت ہے اسکی مخالف سمت یہ طول بنایا جائے۔ سیک کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ (۲) سے ظاہر ہے کہ ج اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں لڑکنے والے

منحنی کے کسی معلومہ مقام کے لئے تمام خط گردونیوں کے انحناء کے مرکزوں کا طاق ایک دائرہ ہے۔ اور جب برداشتہ خط ک میں سے گزرے تو د ج پر منطبق ہوگا اور ج لفاف پر ساکن نقطہ (دفعہ ۱۳۳) ہوگا۔ اوپر کے دائرہ کو اس لئے قرون کا دائرہ کہا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر خط تدبیر کو ایسے دائرہ کے ایک قطر کا لفاف خیال کیا جائے جو ایک ثابت خط مستقیم (دفعہ ۱۴۶ مثال ۱) پر لڑکتا ہے تو یہ مستطیل ہوتا ہے کہ نیم قطر انحناء عماد کا دو چند ہے۔

مثال ۲۔ ”بر تدبیر“ کو ایک ایسے دائرہ کے قطر کا لفاف سمجھ کر جو ایک اور ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے تو کون کی گئی ہے تب دفعہ ۱۲۳ کی ترقیم کے مطابق $s = \frac{1}{r} s' = \frac{1}{r} s'$ اور اسلئے (۲) سے

$$ج = \frac{1}{r} \frac{1}{r} ج = \frac{1}{r^2} ج = \frac{1}{r^2} ج$$

جو دفعہ ۱۴۶ مثال ۲ کے مطابق ہے۔

۱۴۹۔ کسی شکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں۔

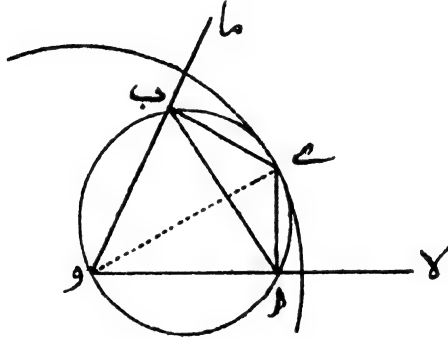
کوئی مستوی شکل اپنی مستوی سطح میں متحرک ہے اس کے مختلف محلوں کے مسلسل سلسلہ پر غور کرو۔ فوری مرکز کا فضا میں ایک خاص طریق (لوکس) ہوگا اور شکل کے اندر بھی ایک خاص طریق ہوگا۔ ایسے منحنیوں کو جنکی اوپر تعریف ہوئی مرکز طریقی کہتے ہیں، اول الذکر کو ہم فضائی مرکز طریقی کہیں گے اور مؤخر الذکر کو جسمی مرکز طریقی۔ جس مسئلہ کا دفعہ ۱۴۶ میں حوالہ دیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ شکل کی کوئی معلومہ حرکت جسمی مرکز طریقی کے فضائی مرکز طریقی پر بغیر پھسلنے کے لڑکنے سے پیدا ہو سکتی ہے۔

شکل کے کسی معلومہ محل پر غور کرو، فرض کرو کہ مے اس کا فوری مرکز اور مے، ڈ، بالترتیب متصل متناظر نقطے ہیں جسمی مرکز طریقی اور فضائی مرکز طریقی پر۔

فرض کرو کہ جسم زاویہ مفط میں سے گھومتا ہے جیسے فوری مرکز سے آڑ پر چلا جاتا ہے۔
تب انتہائی صورت میں دفعہ ۱۴۵ کی رو سے
مے = مے = مے آڑ اور مے آڑ = مے مفط

۳۶۵

اس لئے زاویہ مے آڑ انتہائی معدوم ہو جاتا ہے اور مے پر دونوں طریقوں کے ماسی خط ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور دونوں منحنيات کی متناظر عنصری قوسیں نسبت تساوی میں ہوتی ہیں۔



شکل (۱۳۲)

مثال - مستقل طول کا خط مستقیم Δ ب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم Δ و Δ پر رہتے ہیں۔
فوری مرکز مے و Δ و Δ پر کے عمودوں کا نقطہ تقاطع ہے جو بالترتیب نقاط Δ اور Δ پر گھٹنے جائیں۔ نقاط Δ اور Δ ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا قطر و مے ہے اور چونکہ اس دائرہ میں دے ہوئے طول کا وتر Δ ب محیط پر ایک مستقل زاویہ Δ و Δ بناتا ہے اس کا قطر متعین ہو سکتا ہے اسلئے مے کا فضائی طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے۔ نیز چونکہ زاویہ Δ ب مستقل ہے اسلئے مے کا طریق لمحاظ Δ ب کے ایک دائرہ ہے جس کا قطر و مے کی مستقل قیمت کے مساوی ہے۔ اس لئے حرکت زیر بحث

ایک دائرہ کے دوسرے ثابت دائرہ کے اندر جس کا ناب دو چند ہے لڑکنے کے معادل ہے۔ ایسی حرکت پر دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ میں بحث کی گئی ہے اور یہ دکھایا گیا ہے کہ کوئی نقطہ پ جو لمبا $\frac{1}{2}$ پ کے ثابت ہے قطع ناقص پر مشتمل کرتا ہے جو بعض صورتوں میں جبکہ پ لڑکنے والے دائرہ کے محیط پر واقع ہوگا ایک خط مستقیم میں بگڑ کر رہ جاتا ہے۔

۱۵۰۔ بر دوریوں کی بطور گردنیوں کے دوہری نکوین۔

مزید مثال کے طور پر ہم یکساں دائری حرکتوں کو جو ردار متوازی الاضلاع $وق$ پ $ق$ کے ذریعہ جس کا دفعہ ۱۲۵ میں حوالہ دیا گیا ہے ترکیب دینے کے حلی طریقہ کی طرف غور کرتے ہیں۔

تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ سلاخوں $وق$ ، $وق$ کی زاویہ رفتاریں $ن$ ، $ق$ ایک ہی علامت رکھتی ہیں۔

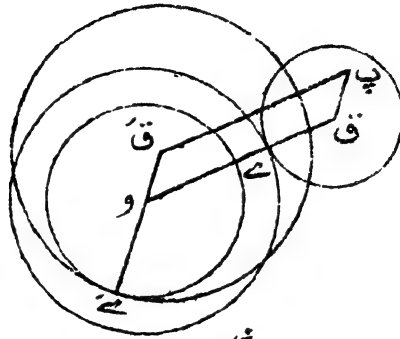
سلاخ $ق$ پ کا فوری مرکز (ے) ایسا نقطہ $ق$ و میں ہوگا

$ن \times ق = ے = ن \times وق$ (۱)

کیونکہ کسی ایسے نقطہ کی رفتار جو $ق$ پ کے ساتھ استوار طور پر لگا ہوا ہے مشتمل ہوگی انتقالیت $ن \times وق$ پر جو $وق$ کے علی القواغم ہے اور ایسے کھانڈ پر جو $ق$ کے لحاظ سے زاویہ رفتار $ن$ سے عمل میں آتا ہے۔ اس لئے شرط بالا کے تحت ایسے نقطہ کی رفتار جو $ق$ پ کے ساتھ لگا ہوا ہے اور آن زیر بحث میں نقطہ ے پر ہے صفر ہوگی۔ اسلئے سلاخ $ق$ پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طرقتیں ہیں جو $و$ اور $ق$ کو مرکز مان کر کھینچ جائیں اور ے میں سے گزریں۔

اسی طرح کے استدلال کی بنا پر سلاخ $ق$ پ کا فوری مرکز (ے) ایسا نقطہ $ق$ و میں ہوگا کہ

* ن × ق = ن × وق (۲)



شکل (۱۳۳)

پس سلاخ ق پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طبعی دائرے ہونگے جنکے مرکز و اور ق ہونگے اور جو ع میں سے گزریں گے۔ چونکہ نقطہ پ دونوں سلاخوں ق پ اور ق پ پر واقع ہے ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی سیدھا یا راستہ بر دور یہ بطور براستہ ادی کے دو طرح سے مرتب ہو سکتا ہے۔

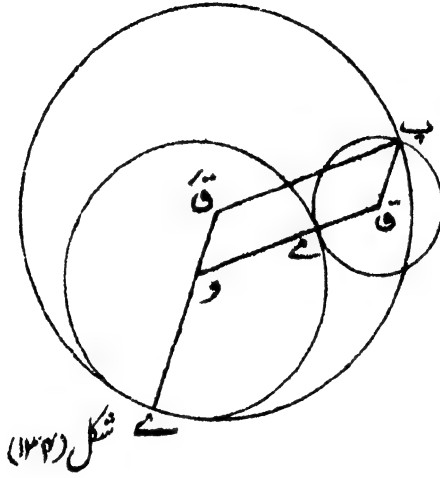
اس خاص صورت میں جبکہ ق پ = ق ع، (۱) اور (۲) سے ماہل ہوتا ہے

ق پ : وق = ق ع : وق = ن : ن = وق : بق = ق ع : بق =

جس سے ق پ = وق = ق ع
پ کا راستہ اس صورت میں برتدویر ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی برتدویر کی دو طرح سے نکوین ہو سکتی ہے یعنی دو معین دائروں میں سے

* شکل ۱۳۳ ایسی صورت کے لئے کھینچی گئی ہے جبکہ ن ع = ن۔ اگر ن > ن
زے ق و مدودہ پ واقع ہوگا اور ع تقاطع ق و کے درمیان۔

کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے باہر لڑکانے سے * دیکھو شکل ۱۳۴۔
 ۳۶۶ مثال کے طور پر خط صنوبری (Cardioid) کی جس کا ذکر دفعہ ۱۲۴ مثال
 ۱۳۴ میں پہلے آیا ہے، دوہری تکوین دی جاتی ہے۔



جس صورت میں زاوی زقاروں ن، ن کی علامتیں مختلف ہوں
 اسے طالب علم کے معائنہ کے لئے چھوڑا جانا ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ کسی آٹے
 یا رجمی بروریہ کی بطور ایک دراستداری خط کے، دو الگ طریقوں سے
 تکوین ہو سکتی ہے اور بالخصوص کسی درتدویر کی تکوین دو قابل تعین دائروں
 میں سے کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے اندر لڑکانے سے
 عمل میں آسکتی ہے۔

امثلہ ۴۶

اشخنا

۱۔ ثابت کرو کہ دائرہ ہی ایک ایسا منحنی ہے جس کا اشخنا مستقل ہے۔

* یہ یولر (۱۷۸۱ء) کا مسئلہ ہے۔

۲- ثابت کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما) پر انحناء کے مرکز کے محدود اس شکل میں رکھے جاسکتے ہیں

$$\text{لا} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}} + \text{ما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}}$$

۳- ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کی ذاتی مساوات اس شکل کی ہے

$$\text{س} = \frac{\text{سا}}{\text{سا}} = \frac{\text{سا}}{\text{سا}}$$

۴- ثابت کرو کہ خط جبری کی ذاتی مساوات اس شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\text{س} = \frac{\text{سا}}{\text{سا}} = \frac{\text{سا}}{\text{سا}}$$

ثابت کرو کہ اس منحنی میں انحناء ایسے بدلتا ہے جیسے عماد۔

$$\text{۵-} \quad \text{ان ضابطوں} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}} = \text{جم سا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}} = \text{جب سا}$$

۳۶۸

کے تفرق سے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}}$$

$$\text{۱۱-} \quad \frac{1}{\text{س}} = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}} \right) + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}} \right) \quad \text{جہاں سر نیم قطر انحناء ہے}$$

۶- اگر ایک منحنی کا ان مساواتوں سے تعین ہو

$$\text{لا} = \text{فارت} \quad \text{ما} = \text{ف} \quad \text{ت}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}} \quad \text{جہاں زبروں سے تفرق بلجا}$$

ت کے تعبیر ہوتا ہے۔

۷- اوپر کا ضابطہ قطع ناقص لا = اجم فسا، ما = ب جب فسا اور قطع زائد لا = اجم فسا، ما = ب جب فسا کی صورت میں لگاؤ۔

۸- ایک منحنی کی کارٹیزی مساوات دی ہوئی ہے، بتاؤ کہ اسکے کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) کس طرح اس کے میلان (سا) کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں

اور ثابت کرو کہ

$$س = \sqrt{\left(\frac{فرا}{فرت}\right)^2 + \left(\frac{فما}{فرت}\right)^2}$$

۹- جس نمونی کی ذاتی مساوات میں $م = جب$ سا ہے ثابت کرو کہ وہ خط تدریر ہے (دفعہ ۱۲۰) کا طریقہ استعمال کرو

۱۰- "مساوی مضبوطی کے زنجیرہ" کی صورت میں معلوم ہے

$$س = م \text{ قسط سا (م مستقل)}$$

جہاں سا حماس کا میلان ہے افق کے ساتھ، ثابت کرو کہ اگر میدان سب نیچے نقطہ پر ہو تو $لا = م$ سا $ما = م$ لوک قسط سا جہاں محور $لا$ اور $ما$ بالترتیب افقی اور انقباضی ہیں۔

۱۱- ایک نمونی کی ذاتی مساوات دی گئی ہے $س = م$ جب $سا$ (م مستقل) اسکی کارٹیری مساوات مائل کرو

$$لا^2 + ما^2 = \left(\frac{م}{س}\right)^2$$

۱۲- اگر $س = \frac{لا}{ما}$ تو ثابت کرو کہ $ما = م$ - ۲ $لا$ جم سا

۱۳- وہ نمونی دریافت کرو جسکی ذاتی مساوات ہے $س = لا$ قسط $سا$ (ما = $\frac{لا}{س}$)

۱۴- اگر نمونی پر کے کسی نقطہ کے محدود $لا$ $ما$ تغیرات کے دے ہوئے تفاعل ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{فرا}{فرت} = \frac{فرت}{فرت} \text{ جم سا} - \frac{1}{س} \left(\frac{فرت}{فرت}\right) \text{ جب سا}$$

$$\frac{فرا}{فرت} = \frac{فرت}{فرت} \text{ جب سا} + \frac{1}{س} \left(\frac{فرت}{فرت}\right) \text{ جم سا}$$

ان نتائج کی حرکتی تعبیر بیان کرو۔ اسلئے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{r} = \left\{ \left(\frac{r^2}{\text{فرت}} \right) \times \left(\frac{r^2}{\text{فرت}} \right) - \frac{r^2}{\text{فرت}} \right\} \div \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} \right)$$

۱۵- ستارہ نما (لا) = حجم طہا = لاجب طہا میں ثابت کرو کہ

سا = ۳۳ - طہا اور اس سے ثابت کرو کہ س = ۳ لاجب طہا حجم طہا

۱۶- اگر (لا) = لوت ۲، ما = لوت ۲ تو مرکز انکھانے محدودیں

$$ل (۲ + ۳ لوت ۲) - ۲ لوت ۲$$

۱۷- دفعہ ۱۳۵ (۲) کے کارٹیزی روابط سے ثابت کرو کہ قائم قطع زائد

$$\frac{لا = ما = م میں س = \frac{لا (لا + ما)}{۲ م ۲}}$$

۱۸- نیز قطع ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = س$ میں $\frac{لا}{ب} = \frac{لا (لا + ما)}{۲ م ۲}$

۱۹- نیز قطع زائد $\frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} = س$ میں $\frac{لا}{ب} = \frac{لا (لا + ما)}{۲ م ۲}$

۲۰- نیز قطع مکانی $ما = لوت ۲$ میں $س = \frac{۲ (لا + لوت ۲)}{۲ م ۲}$

۲۱- نیز نیم کبی مکانی $لا = ما$ میں $س = \frac{لا (لا + ۹ لا + ۱۴ لا)}{۲ م ۲}$ ۳۷۰

۲۲- نیز کبی مکانی $لا = ما$ میں $س = \frac{لا}{۶} (۹ + ۱) \frac{لا}{۶}$

۲۳- نیز ستارہ نما $لا + ما = ۳$ میں $س = ۳ - ل (لا + ما)$

۲۴- ایک منحنی کے متغیر نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع ثابت نقطہ (ضما، عل)

سے اس جملہ (لا - ضما) + (ما - عل) سے تعبیر ہوتا ہے، اس جملہ کو

تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ جب یہ فاصلہ اہل ہو تو نقطہ (لا، ما) کو لازماً اس

عماد کے پایہ پر واقع ہونا چاہئے جو (ضما، عل) سے اس منحنی تک پہنچ سکتا ہے۔

نیز یہ فاصلہ اقل ہوگا اگر نقطہ (ضبا، عا) مرکز انخلا کی یہ نسبت منحنی سے زیادہ قریب ہو اور اعظم ہوگا اگر یہ نقطہ مرکز انخلا کی یہ نسبت منحنی سے زیادہ بعید ہو۔

۲۵۔ اگر منحنی کو ابداً لا = عا، لا = ما = بیما سے تحول کیا جائے تو کسی نقطہ

پر کا انخلا اس نسبت سے بدل جاتا ہے $\frac{عا\beta}{(عا\beta + بیما\beta)}$ جہاں سا ہے محور کا کے ساتھ اصلی منحنی کا میلان۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ $\frac{فرس}{فرص} = \frac{ع ق - (ا + ع) ر}{ق}$ ثابت کرو کہ

جہاں $ع = \frac{فرما}{فرلا}$ ، $ق = \frac{فرما}{فرلا}$ ، $ر = \frac{فرما}{فرلا}$

۲۷۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر انخلا $\frac{اجم فبا}{رر}$ ہے جہاں $ر$ و $ا$ اس کی فاصلے میں اور $فبا$ ان کا درمیانی زاویہ ہے۔

۲۸۔ قائم قطع زائد $ر$ $اجم طبا = ا$ میں $ص = \frac{ر}{ا}$

۲۹۔ چشمہ منحنی

$ر = ا$ $اجم طبا$ میں $ص = \frac{ا}{ر}$

۳۰۔ منحنی $ر = ا$ $اجم طبا$ میں $ص = \frac{ر}{ا}$ $\frac{ا}{(ا + م) ع} = \frac{ا}{(ا + م) ر}$ ۳۱

۳۱۔ ضابطہ $ص = \frac{ر فرد}{فر ع}$ لگانے سے برتدیر کے کسی نقطہ پر کا نیم قطر

انخلا دریافت کرو۔ (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۲۴۹)

فائدہ کے درجہ کی صورت کا معائنہ کرو۔

۳۲۔ اگر منحنی تکی مساوات اس شکل $ر = ف (ع)$ میں دی ہوئی ہو تو قطب میں

گذرنے والا وتر انخنا ہوگا $\frac{ع}{فر} ۲$

ثابت کرو کہ خط منوبری کے قطب میں سے گذرنی والا وتر انخنا سمتی نیم قطر کا $\frac{۱}{۳}$ گنا ہوتا ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ قطب میں سے گذرنے والا منحنی $ر = ۱ + ۳م$ طہ کے کسی نقطہ پر کا وتر انخنا $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ منحنی $ر = ۱ + ۳ف$ (ع) کے پائین منحنی کا انخنا بلحاظ مبدأ کے $\frac{۲}{۳}$ ہے جہاں $ر = ۱ + ۳ع$ اصل منحنی سے متعلق ہیں۔

۳۵۔ ایک قطع ناقص کے نیم محور $ا$ ب ہیں، ثابت کرو کہ بلحاظ مرکز کے اسکے پائین منحنی کا انخنا $\frac{۳}{۲} - \frac{ا + ب}{۳}$ ہے جہاں $ر$ قطع ناقص کے متناظر نقطہ کا سمتی نیم قطر ہے۔

۳۶۔ ذیل کے مضابطہ کو ثابت کرو۔

$$\frac{۱}{ر} = \left\{ \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \left(\frac{فر}{فرس} \right) - \frac{۱}{ر} \left(\frac{فر}{فرس} \right) \right\} \div \left\{ ۱ - \left(\frac{فر}{فرس} \right) \right\}$$

اور مثال ۲۲ کے نتائج حاصل کرنے میں اسے لگاؤ۔

۳۷۔ ثابت کرو کہ قطبی محدودوں میں اپل ماس کے لئے شرط ہے

$$\frac{فر}{فرطہ} + ۶ = ۰ \text{ جہاں } ۶ = \frac{۱}{ر}$$

۳۸۔ اس مضابطہ سے $سا = طہ + فہ = طہ + مم = \frac{۱}{ر} فرطہ$ سے

قطبی محدودوں میں انخنا کے لئے یہ مضابطہ حاصل کرو

$$\frac{۱}{ر} = \left\{ \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \left(\frac{فر}{فرطہ} \right) + \frac{۱}{ر} \left(\frac{فر}{فرطہ} \right) \right\} \div \left\{ ۱ + \left(\frac{فر}{فرطہ} \right) \right\}$$

$$= \left(\frac{۶}{۶} + \frac{۶}{۶} \right) \div \left\{ \left(\frac{۱}{۶} \frac{۶}{۶} \right) + ۱ \right\} = \frac{۱}{۶} = ۶ \text{ جہاں}$$

۳۹۔ اس ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ مبدا میں سے گذرنیوالا وتر انحناء ہے

$$۲ \left\{ \left(\frac{۱}{۶} \frac{۶}{۶} \right) + ۱ \right\} \div \left(\frac{۶}{۶} + \frac{۶}{۶} \right)$$

امثلہ ۴

نیوٹن کا طریقہ

۱۔ منحنی ۱ ماً = (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) کا نیم قطر انحناء نقطہ (ص) پر ہے

$$\frac{(۱-۱) (۱-۱) (۱-۱)}{۲}$$

۲۔ نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ زنجیرہ ماً = ۱ جنم ۱ کے راس پر نیم قطر انحناء کے مساوی ہے۔

۳۔ نقطہ (۱-۱) پر منحنی ماً = ۱ (۱-۱) (۱-۱) کا نیم قطر انحناء ۱ ہے۔

۴۔ دایم ماً = ۱ (۱-۱) (۱-۱) کا نیم قطر اس کے راس پر ۱ ہے۔

۵۔ نقطہ (۱-۱) پر منحنی ماً = ۱ (۱-۱) (۱-۱) کا نیم قطر انحناء دریافت کرو۔

۶۔ مکانی (۱-۱) ماً = ۱ (۱-۱) (۱-۱) کا نیم قطر انحناء ان نقطوں پر دریافت کرو جہاں پر یہ محوروں کو مس کرتا ہے۔

۷۔ نقطہ ۱ ماً = ۱ (۱-۱) (۱-۱) جب ۱-۱ جب ۱-۱ کا نیم قطر انحناء

دریافت کرو۔ [۲۶۹۵]

۸۔ مکانی ماً = ۱ (۱-۱) (۱-۱) میں 'مبدا' پر محور ماً کے متوازی وتر انحناء ۳۷

کا طول (۱+۱) ہے اور دائرہ انحناء کی مسادات ہے

۱ + ۱ = (۱+۱) (۱-۱) (۱-۱)

۹۔ منحنی ماً = ۱ (۱-۱) (۱-۱) کا نیم قطر انحناء (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) پر ہے

دریافت کرو۔

$$\left[\frac{4(m+1)}{2(n-b)} \right]$$

۱۰۔ مبداء پر مخروطی ما = (لا + ۲ھ لا + ما + ب ما) کے دائرہ انحنائی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ منحنی سے دوبارہ خط مستقیم (ا-ب) ما = ۲ھ لا پر ملتا ہے۔

۱۱۔ اگر ایک منحنی کی قطبی مساوات $r = f(\theta)$ ہو جہاں $f(\theta)$ (طما) طما کا جفت تفاعل ہے تو نقطہ طما = - پر انحنایہ $\frac{f(\theta) - f''(\theta)}{2[f'(\theta)]^2}$

۱۲۔ زیادہ سے زیادہ کشش کے مجسم "دیکھو مثال ۱۹ صفحہ ۴۴۹" کے نصف النہاری منحنی میں ثابت کرو کہ محور کے سروں پر نیم قطر انحنایہ بالترتیب ۵ اور ۲/۳ ہیں۔
۱۳۔ چشمہ منحنی $r = \frac{1}{a} \cos \theta$ طما کے کسی ایک سر پر نیم قطر انحنایہ $\frac{1}{3}$ ہے۔

۱۴۔ استداری خط لا = لا طما + ک جب طما = ما = لا۔ ک جم طما کے نیم قطر انحنایہ ان نقطوں پر جہاں یہ قاعدہ سے نزدیک ترین اور بعید ترین ہے $\frac{r}{(1 \pm k)} = 1$ ہیں۔

۱۵۔ نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ بردوریہ

لا = لا جم ن ت + لا جم ن ت، ما = لا جب ن ت + لا جب ن ت کے انحنایہ کے نیم قطر ان نقاط پر جو مرکز سے قریب ترین اور بعید ترین ہیں یہ ہیں $\frac{(n, 1 \pm 1, n, 1)}{(n, 1 \pm 1, n, 1)}$

یہ شرط مستنبط کرو کہ مرکز سے قریب ترین نقاط پر بردوریہ کو مرکز کی جانب مقعر ہونا چاہئے (جیسے چاند کا مدار لگنا سورج کے)۔

۱۶۔ لیسازو کے منحنی لا = لا جم ن ت، ما = لا جب ن ت کے نقطہ

ت = ۰۔ پراخنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

اس منحنی کا خاکہ کھینچو۔

[۲ب/۱]

۱۷۔ اگر ایک منحنی کی مساوات قطبی محدود (ر، ط) میں ہو اور قطب منحنی پر واقع ہو اور ابتدائی خط قطب پر کا ماس ہو تو ثابت کرو کہ قطب پراخنا کا قطر

$$= ۲ر \sin \frac{\pi}{۲}$$

منحنی (ر = ۲ر) کے قطب پراخنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر ایک منحنی پر نقطہ پ ایسا ہو کہ اس پر کا انحناء غیر مسلسل ہو لیکن ماس کی سمت غیر مسلسل نہ ہو اور پ کی متقابل جانبوں میں پاس کے نقطے ق، د

ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ پ ق ر کا انحناء آخر الامر ہوگا $\frac{۱۴}{۲ر} + \frac{۲۴}{۲ر}$ جہاں

ر، ۱، ۲، دے ہوئے منحنی کے انحناء کے نیم قطر ہیں پ کے دونوں جانب اور ۱، ۲، ۳،

نسبتوں $\frac{پ ق}{ق ر}$ اور $\frac{پ ر}{ق ر}$ کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

۱۹۔ حادہ زاویہ جو ایک منحنی کا ایک وتر پ ق پر کے ماس کے

ساتھ بناتا ہے جبکہ ق کو پ کے لانتہا قریب لیا جاتا ہے آخر الامر $\frac{۱}{۲} \frac{مف}{مف}$

کے مساوی ہے جہاں مف قوس پ ق ہے اور ر، نیم قطر انحناء ہے پ پر

۲۰۔ اگر ایک لانتہا چھوٹی قوس پ ق کے سروں پر کے ماس ہر پر لیں تو آخر الامر پ اور ہر ق نسبت تساوی میں ہونگے۔

یہ کیوں حاصل نہیں ہوتا کہ ہر کو پ ق کے وسطی نقطہ کے ساتھ طانیوالا خط آخر الامر پ ق پر عمود وار ہوگا۔

۲۱۔ یہ تسلیم کر کے کہ مثلث (ج ج) کے بیرونی دائرہ کا نیم قطر $\frac{۱}{۲}$ جب

ہے ثابت کرو کہ مثال ۱۹ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لٹھی دائرہ انحناء کے دائرہ پر مطبق ہوتا ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ جب ایک ذرہ پر مائل قوت حرکت کی سمت میں ہو تو راستہ کا ماس "اچل" ہوتا ہے۔

امثلہ ۲۸

(الفاف - برہیجی)

۱۔ مکانات $ما = ۲$ (لا - عا) کالفاف خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ہے جہاں عا متبدل ہے۔

۲۔ مکافی $ما = ۲$ (لا) کے کسی نقطہ پ سے محدودوں کے محوروں پر عمود پ م 'پ ن نکالے گئے ہیں' م ن کالفاف دریافت کرو۔

۳۔ خط لاجم عا + حاجب عا = نقطہ عا کالفاف دریافت کرو اور نتیجہ کا ہندسی مجموعہ بیان کرو۔

۴۔ مکافیوں $ما = ۲$ (لا - عا) کالفاف جہاں عا متبدل ہے یہ منحنی ہے $ما = ۲$ (لا)۔

۵۔ ایک منحنی کے سمتی نیم قطروں کو قطر ان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ ان کالفاف دے ہوئے منحنی کا پائین خط ہے بلحاظ مبدا کے۔

۶۔ مخروطی تراش کے ماسکی دتروں کو قطر ان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ان کالفاف معلوم کرو۔

۷۔ ایک دائرہ کے محیط پر کے ثابت نقطہ میں سے دتر کھینچے گئے ہیں، ان دتروں کو قطر ان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائروں کالفاف خط منوہری ہے۔

۸۔ قائم قطع زائد کے مرکزی نیم قطروں کو قطر ان کر دائرے بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کالفاف بر فوئی کا چشمہ منحنی ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ منحنیات پ ج م + ق جب عا = ط کالفاف جہاں پ ق ط متغیروں لا، م کے دے ہوئے تفاعل ہیں اور عا متبدل ہے۔

پ' + ق' = ط' - ح -

۱۰۔ دائروں لاۓ باۓ۔ ۲ اور لا جم۔ ۳۔ ۲ اور ما جب۔ ۴۔ ج کا

لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

۱۱۔ ع اور عہ کے درمیان رشتہ معلوم کرو کہ خط متقیم

لا جمع ع + واجب ع = ع دائروں (لا - ا) + ما = ب

اور (۱۱ + ۱۷) = ۲۸ ج سے مساوی طول کے وتر کاٹے۔ ثابت کرو کہ

اس شرط کے ماتحت خط کالفاظ قطع مکانی ہے۔

۱۲۔ مستقل رقبہ کے ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کا مرکز دی ہے اور

چنگے جوہیت میں ایک دوسرے پر منطبق ہیں، ثابت کرو کہ لفافہ دو مزدوج قائم الزاموں پر مشتمل ہے۔

۱۳۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (± ج ۱)۔

سے اس کے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل (= ب) ہے، ثابت کرو کہ لغات

ناقص ہے $\frac{r_a}{r_b + r_j} + \frac{r_a}{r_b} = 1$ اگر عمود متحرک خط کے ایک ہی

جانب ہوں یا رائد ہے $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$ اگر عمود خط کی متقابل ۳۷

جانہوں میں ہوں -

۱۴۔ قطع مکانی $\vec{m} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{L}}{dt}$ کے دوہرے معنیوں کو قطران کردار

کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان کا لغاف $MA = M(1 + \lambda)$ ہے۔

۱۵۔ قطع ناقص $\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = 1$ کے دو ہرے سینوں کو

طرحان کرد اُسر کیسے گئے ہیں ثابت کرو کہ لفاف ناقص

۱- ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (± ج) سے

فطیر کے عمودوں کے اربعوں کا مجموعہ مستقل (= ۴۲) ہے ثابت کر دکھانا

مخروطی تراش $\frac{لا^2}{ج^2 م} + \frac{ما^2}{ب^2 م} = ۱$ ہے، مختلف صورتوں کا معائنہ کرو۔
 ۱۷۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ لفاف قطع ناقص ہے۔
 ۱۸۔ ان ناقصوں $لا = ا ب$ (طہ - صہ) $ما = ب ج$ طہ کا لفاف معلوم کریں جہاں صہ متبدل ہے۔

۱۹۔ متبدل ج کے لئے جوزنجیرے $ما = ج جمن (ج - لا)$ سے تعبیر ہوتے ہیں ان کا لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے۔

۲۰۔ ان ناقصوں $\frac{لا^2}{صہ م} + \frac{ما^2}{بہ م} = ۱$ کا لفاف جہاں $صہ + بہ = م$ (مستقل) ستارہ نما $لا^2 + ما^2 = م^2$ ہے۔

۲۱۔ خط مستقیم کا لفاف جو محدودوں کے محوروں پر ایسے مقطوعے کا بنتا ہے جن کا مجموعہ $م$ ہے قطع مکانی $لا + ما = م$ ہے۔

۱۲۔ دو نقطے محدودوں کے محوروں پر مختلف، مستقل زقاروں سے حرکت کرتے ہیں ثابت کرو کہ ان کو ملانے والا خط ایک قطع مکانی کو مس کرتا ہے۔

۲۳۔ قطع ناقص $\frac{لا^2}{ب^2 م} + \frac{ما^2}{ج^2 م} = ۱$ کے کسی نقطہ سے محدودوں کے محوروں پر عمود کیسے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان عمودوں کے قدموں کو ملانیوں لے خط مستقیم کا لفاف $(\frac{لا}{ب}) + (\frac{ما}{ج}) = ۱$ ہے۔

۲۴۔ انحنیات $صہ ما^2 = لا (لا + صہ)$ کے انتہائی نقاط تقاطع کا طریق دریافت کرو جہاں صہ متبدل ہے۔ اور جو نقطہ حاصل ہوا اس کا معائنہ کرو۔
 ۲۵۔ مستقل نیم قطر کے ایک دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک دے ہوئے نغی پر واقع

ہوتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کالفاف دو متوازی منحنی ہیں۔

۲۶۔ دے ہوئے نیم قطر کا ایک دائرہ ایک دے ہوئے منحنی کو مس کرنا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کالفاف دو متوازی منحنیات پر مشتمل ہے۔

۲۷۔ اگر ایک منحنی کی مسادات اس شکل $\text{ر} = \text{ف}(\text{ع})$ میں دی ہوئی ہو تو اس کے کسی متوازی منحنی کی مسادات اس شکل $\text{ر} = \text{ف}(\text{ع} - \text{ج}) + \text{ج} - \text{ج}$ میں ہوگی۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ منحنی پائیں منحنیات (دفعہ ۱۳۱) کا مسئلہ خط مستقیم لا جم مسا + حاجب مسا = ع کالفاف معلوم کر نیلے معادل ہے جہاں ع متبادل مسا کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے۔

اسکی تصدیق کرو کہ اسی سے دفعہ ۱۳۱ کا منابطہ (۴) حاصل ہوتا ہے۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ مکانی $\text{ما} = \text{لا} + \text{لا}$ کا منحنی پائیں منحنی بلحاظ اس کے یہ منحنی ہے $\text{لا} = \text{ما} = \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{لا})$

۳۰۔ لافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ دائرہ کا منحنی پائیں منحنی قطع ناقص ہوگا اگر قطب دائرہ کے اندر ہو اور قطع زاہد ہوگا اگر قطب دائرہ کے باہر ہو

۳۱۔ ہر کسی طریق پر ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کے کسی نقطہ پر انحناء کے نیم قطر کے سامنے قطب پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۳۲۔ مساوی الزاویہ لولبی کا پرچہ اسی زاویہ کا مساوی الزاویہ لولبی ہوتا ہے۔

۳۳۔ قطع ناقص $\frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = ۱$ کے پرچہ سے گھرا ہوا رقبہ

$\pi \text{ا}(\text{ب} - \text{ب})$ ہے۔

۳۴۔ منحنی $\text{لا} = \text{ما}$ کے کسی نقطہ پر کے مرکز انحناء کے ع ہیں

ضربا = $\text{لا} - \frac{۹}{۲} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{ع} + \frac{۴}{۳} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

ثابت کرو کہ مہد کے نزدیک پرچہ کی شکل مکانی $\text{ما} = \frac{۱۶}{۹} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کی ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی نقطہ انعطاف رکھتا ہو تو اس کا پرچہ

ایک متقارب رکھتا ہے۔

ثابت کرو کہ مخنی $\lambda = \lambda^2$ کے برہیچہ کا وہ حصہ جو مخنی کے اس حصہ کے جواب میں ہے جو مبدأ کی پروسس میں ہے تقریباً قطع زائد $\lambda = \lambda^2$ سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

۳۶۔ قطع زائد $\lambda = \lambda^2$ و جنہ $\lambda = \lambda^2$ کا برہیچہ

(λ) λ^2 - (λ) λ^2 = ($\lambda + \lambda$) λ^2 ہے۔

۳۷۔ نقطہ و سے شعاعیں نکل کر ایک دے ہوئے مخنی سے منعکس

ہوتی ہیں، ثابت کرو کہ منعکسہ شعاعیں سب کی سب ایسے مخنی پر عماد ہیں جو لمبا طو کے، معلومہ مخنی کے یا اُس مخنی کا مشابہ ہے لیکن دوسرے ابعاد والا ہے۔

۳۸۔ اس لئے ثابت کرو کہ دائرہ پر کے انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ گھونکا مخنی کا برہیچہ ہے۔ اور اس خاص صورت میں جبکہ روشن نقطہ دے ہوئے دائرہ کے محیط پر واقع ہے آتشی خط منوہری ہے۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ کسی مخنی پر انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ ایسے دائروں کے نظام کے لفاف کا برہیچہ ہے جو مخنی کے مختلف نقطوں کو مرکز مان کر کھینچے جائیں اور سب کی سب روشن نقطہ میں سے گزریں۔
انعطاف کی صورت میں متناظر مسئلہ کیا ہوگا۔

امثلہ ۴۹

(گردونے وغیرہ)

۱۔ ایک پتر کسی طرح سے بھی اپنے مستوی میں حرکت کرتا ہے، ثابت کرو کہ پتر سے اس کے متوازی خطوط متوازی مخنیات کو لطف کرتے ہیں۔

۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتا ہے اور اس پر کا ایک نقطہ قی ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے جو و میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ فوری مرکز قی میں سے گزرنے والے

۱۰۔ اگر ایک مساوی الزویہ لولبی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکے تو قطب کا راستہ ایک خط مستقیم ہوگا۔

۱۱۔ اگر شکافی لولبی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ایک خط مستقیم پر لڑکے تو قطب کا راستہ خط جبری ہوگا۔

۱۲۔ اگر گوش کے لولبیوں $\frac{1}{e} = \frac{1}{r} + b$ میں سے کوئی

ایک ایک خط مستقیم پر لڑکے تو قطب ایک منحنی مرتسم کرے گا جس کا انحنائیسہ بدلیگا جیسے عماد۔

۱۳۔ ایک منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑتا ہے، ثابت کرو کہ اس گردونہ کی قوس جسے کوئی برداشتہ نقطہ مرتسم کرتا ہے اس منحنی کی متناظر قوس کے مساوی ہے جو لمبا ط و کے دے ہوئے منحنی کا پائیں منحنی ہے۔ [Steiner]

۱۴۔ بند بیضوی منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑتا ہے، ثابت کرو کہ وہ متغیر خط جو نقطہ تماس کو اندرونی معمولہ نقطہ و سے ملتا ہے ایک پوری گردش میں اتنا رقبہ عبور کرتا ہے جو لمبا ط نقطہ و سے ہوئے منحنی کے پائیں منحنی کے رقبہ کا دوپندہ ہے۔ [Steiner]

۱۵۔ فوری مرکز کے نظریہ سے ثابت کرو کہ جب جوڑ دار دندلوں کے مستوی ذواربعۃ الاضلاع سے گھرا ہوا رقبہ اہل (ساکن) ہو تو ذواربعۃ الاضلاع ہم محیط ہوگا۔



اصطلاحات صغاری احصاء

جلد دوم

(۴)

Circuit	چکر	Acoustics	علم آواز
Cisoid	لبلائی خط	Anchor-ring	لنگر آچلا
Comet	شهاب	Annular	طبقه دار طلقه نما
Commensurable	متوافق	Astroid	ستاره نما
Cone	مخروط	Asymptotes	مستقارب
Conic	مخروطی	Auxiliary circle	معاون دایره
Contour line	هم ارتفاعی خط	Bipolar	دوقبلی
Convergence	استدقاق	Body centre	جسمی مرکز طریق
Crank	کرنیک	Cardioid	خط صنوبری
Critical case	فاسل صورت	Carried line	خط بردار
Crossed	{ متقاطع متوازی الاضلاع }	Catenary	زنجیری
parallelogram		Caustic	پاشنه
Cusp	قوس	Centre	مرکز خط
		Centre of rotation	مکمل و مرکز

Impulse	دشک	Cyclic	هم محیط
Indefinite	نامحدود و تکمله	Quadrilateral	چهار اضلعی
Integral		Cycloid	خط تدویر
Indicator	نماینده تصویر	Definite integral	محدود و تکمله
diagram		Directrix	مرتب
Index	نماینده یا اشاره	Eccentricity	خروج المکز
Instantaneous	فوری مرکز	Ecliptic	طریق الشمس
centre		Ellipsoid	ناقص نام
Integral	محله	Elliptic Integral	ناقصی محله
Integration	محمل	Ellipticity	ناقصیت
Integration	محمل بالحصص	Envelope	لحاف
by parts		Epicyclic	بردوریه
Intercept	باینی حصه	Epicycloid	بر تدویر
Interpolation	بینی ادرج	Epitrochoid	بلاستاری
Interval	وقف	Equipotential	هم قوه
Intrinsic	ذاتی مساوی	Evolute	پریچپ
equation		Flexure	ختم
Inverse	مطلوب	Focus	بازگشت
Inversion	تقلیب	Frustum	ناقص نامکمل
Involute	در چپ	Geodesy	مقطوعه
Irrational	غیر ناطق	Harmonic	ارضیات
Lamina	پترا	Hyperboloid	موسیقی
Latus-rectum	وتر خاص	Hypocycloid	زائد نام
Lemniscate	چشمه منحنی	Hypotrochoid	در تدویر
Limacon	مکونکام منحنی		بر تدویر

Point-roulette	نقطہ گردونیہ	Line-roulette	خط گردونیہ
Polar	قطبی	Linkage	رابطہ
Pole	قطب	Link-work	رابطہ کاری
Prolate Ellipsoid	لبوتراناقص نما	Loop	حلقہ
Prolate spheroid	لبوتراکرہ نما	Magnetic curves	مغناطیسی منحنی
Pyramid	مخروط مضلع	Mechanical	مسیلی
Quadrature	تربیع	Modulus	مقیاس
Range	سب	Multiple Integral	ضعفی محمولہ
Rational	منطوقی	Node	عقدہ
Reciprocal	متکافی	Optical	مناظری
Rectification	تخطیط	Optics	علم مناظر
Reduction	تحویل	Orientation	تشریاتی
Reflection	انعکاس	Oscillating	اہترازی
Refraction	انکسار	cylinder	اسطوانہ
Refractive Index	انکسار نما	Osculating circle	لشی دائرہ
Retrograde	رجعی	Oval	بیض
Rolling	راہلکنے	Paraboloid	مکافی نما
curves	غلطان منحنی	Parameter	متبدل
Roulette	گردونیہ	Partial	جسہ روی
Screw-thread	پیچ تاکا	Pericycloid	گرد تدویر
Semi-cubical	نیم کعبی	Period	دور
parabola	مکافی	Phase	ہیئت
Space centreode	فضائی مرکز طریقی	Piston	فشادہ
Space Integral	مکافی محمولہ	Pivot	چول
Spandril	کمان شانہ	Planimeter	سطح پیم

Tractrix	خط تجری	Spheroid	کرہ نما
Trajectory	خط رمی	Spiral	لولبی
Transcendental	ماورائی	Stationary	اچل، مقیم
Trapezium	منحرف	Steam Engine	بھاپ انجن
Trochoid	استداری خط	Surface of revolution	گردشی سطح {
Undulation	موج	Tension	تشداد
Vector	سمتی	Tidal clock	موج گھڑی
Witch of Agnesi	اگنسی کی ڈائین {	Time integral	زمانی تکملہ

اشاریہ

احصاء صفوں کے لحاظ سے

- اچیل ٹاس، ۲۵۷
 اچیل نقطہ، ۲۵۷
 ارشمیدس کا گولب، ۲۱۲
 استداری خط، ۳۰۵
 استدقاق، محدود یکجہ کا، ۲۸۳
 انتقالیت (ہٹاؤ)، مستوی شکل کی، ۴۸۸، ۵۰۱
 انحناء، ۲۵۲، ۲۶۴، ۲۶۸
 اوسط قیمت کا مسئلہ، ۲۸۸
 اوسط قیمتیں، ۳۵۷
 اوسط مرکز، ہندسی اشکال کا، ۳۶۰
 ایملر کا سطح پیا، ۳۲۹
 براستداری، ۲۱۰
 برچہ، ۲۷۸، ۲۸۳
 برتدویر، ۲۷۷، ۲۵۹، ۲۸۲، ۲۹۵، ۲۹۹، ۵۰۱، ۵۰۴
 بردورے، ۲۱۶، ۵۰۳
 برنولی کا چشمہ منحنی، ۲۲۵، ۲۲۹

- پائیں منحنی، ۴۳۲
 پوتیلے کا رابطہ، ۴۳۰
 پیپس کے مسئلے، ۳۶۴
 تبدیلی، متغیر کی، ۲۲۵، ۲۹۸
 تحول، ضابطے، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۹۸
 تربیع، تقریبی، ۳۵۳
 تفرق، محدود، مسئلہ کا، ۲۸۹
 تقریبی، مثلث، ۳۵۳
 تقابیل، ۴۲۹، ۴۳۰
 مثلث، ۲۲۱
 بالخصوص، ۲۴۱
 ابدال سے، ۲۳۵، ۲۳۸، ۲۴۰
 غیر منطبق تفاعلوں کا، ۲۳۲، ۲۵۷
 منطبق کسروں کا، ۲۲۸، ۲۴۸، ۲۵۱، ۲۵۳
 مثلثی تفاعلوں کا، ۲۳۸، ۲۹۸
 مثلے، محدود، ۲۸۰، ۲۸۲، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۳۰۲
 تقریبی قیمت، ۳۵۳
 ضعیفی، ۳۶۸
 چار سطحی، اسکا حجم، ۳۳۵
 شمشہ منحنی، برزولی کا، ۴۲۵، ۴۲۹
 چلبی متوازی الاضلاع، ۴۳۲
 حجم، مجسموں کے، ۳۳۲، ۳۳۴، ۳۳۶، ۳۶۹
 خط تدویر، ۴۰۳، ۴۵۸، ۴۸۱، ۴۸۶، ۴۹۵، ۴۹۹، ۵۰۱
 خط جبری، ۳۹۹
 خط گردو نیہ، ۴۹۹

- دائرہ کا درجہ ، ۴۱۱ ، ۴۸۷
 دراستداری ، ۴۱۰
 دریچے ، ۴۸۶
 درندویر ، ۴۰۷ ، ۴۰۸
 دو قطبی متحد ، ۴۳۷
 ذاتی مساوات ، شخصی کی ، ۴۵۸
 رقبہ ، ۲۰۱ ، ۳۱۷
 اس کی علامت ، ۳۲۱
 جو ایک متحرک خط عبور کرے ، ۳۲۷
 رقبہ ، مستوی منحنیوں کے ، ۳۱۷ ، ۳۱۸ ، ۳۲۴
 اس کی آلی پیمائش ، ۳۲۹
 زاوہ ، ۳۱۹ ، ۴۲۸ ، ۴۲۹
 زنجیرہ ، ۳۴۳ ، ۳۹۷ ، ۴۵۸ ، ۴۶۳
 ستارہ نما ، ۴۱۶ ، ۴۹۳
 سطح پیا ، ۳۲۹
 سپین کے قاعدے ، ۳۴۱ ، ۳۵۶
 صنوبری (خط) ، ۴۱۳
 ضعفی کھلے ، ۳۶۸
 عقدہ ، ۳۹۰
 عقدوں کا طریقہ ، ۴۷۸
 علامت رقبہ کی ، ۳۲۱
 فوری مرکز ، ۴۸۸ ، ۴۹۴ ، ۵۰۱
 قرون کا دائرہ ، ۵۰۱
 قطبی ، مکانی ، ۴۳۲
 قوس (شخصی کی) ، ضابطے ، ۳۴۴ ، ۴۸۸ ، ۴۹۴

- قیمت، II کی، ۳۵۷
 کارٹیز می بیضہ، ۲۳۹
 کرہ، اسکی سطح، ۳۵۱
 اس کا حجم، ۳۳۶
 کردی قطعہ، اس کا حجم، ۳۳۶
 کعبی مخمبات، ۳۹۱
 کوشس کا طریقہ، تقریری شکل کا، ۳۵۴
 کیسینی کے بیضے، ۲۲۰
 گردیدہ دور، ۲۰۷، ۲۰۹
 گردشی سطح، اس کا رقبہ، ۳۴۹
 اسکی اوسط مرکز، ۳۶۲
 گردونے، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۹
 گونگا مخفی، ۲۱۴، ۲۲۳
 لشی دائرہ، ۲۶۸
 لفاف، ۲۷۰، ۲۷۵
 لنگر جملہ، ۳۳۷
 لولبی، مسادی الزاویہ، ۲۲۱، ۲۶۰
 ارشمیدس کا، ۲۱۲
 مشکانی، ۲۲۳
 لیسا زو کا مخفی، ۲۰۰
 متغیر کی تبدیلی، شکل میں، ۲۳۵، ۲۴۰
 مشکانی قطبی، ۲۳۲
 مشکانی لولب، ۲۲۳
 متوازی مخفی، ۲۸۶
 مخروط، قائم مستدیر، ۳۴۱، ۳۴۹، ۳۶۳

مرکز خط، ۵۰۱

مزدوج نقطه، ۳۹۰

مسادوی (الزادیه لوبی)، ۴۲۱، ۴۶۰

مقناطیسی، ۴۲۱

مکانی، ۲۴۵، ۳۲۰، ۳۴۳، ۳۶۲، ۴۲۴، ۴۵۹، ۴۶۳، ۴۶۶

۴۶۹، ۴۷۴

مکانی نام، ۳۳۶، ۳۴۷، ۳۶۳

ماسی قطبی مسادات، ۴۲۶

ناقص، ۳۱۹، ۳۲۷، ۳۴۶، ۴۲۹، ۴۵۹، ۴۶۶، ۴۸۰، ۴۸۵

۴۹۰، ۵۰۳

ناقص نام، ۳۳۸، ۳۶۴

گردشی، اسکی سطح، ۳۵۲

ناقصی، ۳۴۷

نقطه گردونیه، ۴۹۳، ۴۹۵

نیم کبی مکانی، ۲۹۴

نیون کا طریقہ، انحناء پر بحث کرنیکا، ۴۶۴

بارش کا رابطہ، ۴۳۲

